Tema 1 MOVIMENT ONDULATORI

P2. Les dades que ens proporciona l'enunciat són:
$A = 10^{-3}$ m; N = 440 Hz; T = 1/440 s; ω= 880rad/s.
Per a escriure l'equació, usem la funció cosinus (en t = 0, és x = +A):

$$\mathbf{x = A \cos (\omega t) = 10^{-3} \cos (880\pi t)\ m;}$$

i derivant obtenim la velocitat:

$$\mathbf{v = - 0{,}880\pi \sin (880\pi t)\ m/s}$$

P3. Per a contestar les preguntes, suposarem que la massa del ressort és menyspreable.

a) Si es duplica la massa, com $\omega = 2\pi N = \sqrt{K/m}$, N i ω disminueixen, T augmenta. D'altra banda, vmáx = (vmáx = Aω) i amáx (amáx = ω^2x) disminueixen.

b) Si la freqüència es redueix a la meitat (i suposant amplitud constant) T es duplica, (ω= 2πN) i $v_{máx}$ ($v_{máx}$ = Aω) es redueixen a la meitat i $a_{máx}$ ($a_{máx}$ = = ω^2x) es divideix per 4.

P5. a) Com $a = -\omega^2 x = -16x$, ω= 4 rad/s. Després: N = 4/2πHz= 2/π Hz, $v_{máx}$=Aω=8 4=32 m/s.

b) Si utilitzem l'equació. x = A sen (ωt), en aquest cas és **x = 8 sen (4t).**

Per a x_1 = 2 = 8 sen (4t_1); 4t_1 = arc sen 0,25 = 0,2527 rad t_1 = 0,063 s.

Per a x_2 = 4 = 8 sen (4t_2); 4t_2 = arc sen 0,5 = 0,524 rad; t_2 = 0,131 s.

Doncs el temps invertit és: $t_2 - t_1$ = 0,131 -0,063 = 0,068 s.

P8. a) A = 10 cm.

b) De l'equació $|a|_{màx} = \omega^2 A$ aïllem ω: $\omega = \sqrt{\frac{|a|_{màx}}{A}} = \sqrt{\frac{5}{0{,}1}}$ =7,071 rad/s=2π/T;

T= 2π/7,071 = 0,89s

c) L'energia mecànica no depèn de la posició del punt oscil·lant; doncs

$$\mathbf{E_{MEC} = Ec + Ep = Ec_{màx} = 1/2\ m\ v_{máx}}$$

E_{MEC} = 1/2 m $(A\omega)^2$= 1/2 m $(A\ 2\pi/T)^2$ =1/2 · 0,01 kg · $(0{,}1\ m \cdot 2\pi/0{,}89\ s)^2$ = 2,5 10^{-3} J.

P10. a) El valor màxim de l'acceleració, segons la gràfica és $a_{máx}$ = 10 m/s^2, i el període T=0,2s. Per tant:
N = 1/T = 1/ 0,2 = 5 Hz, ω= 2πN = 10π rad/s. I com $a_{máx}$ = 10 m/s^2 = A ω^2,

aïllem A = 0,01m:

b) L'eq. del MAS és x = A cos(ωt), ja que segons la gràfica, en t = 0 s, a és negativa i de valor absolut màxim (o siga, x = +A).

Per tant, v = dx/dt = – Aω· sen(ωt)

Ec = 1/2 mv^2 = 1/2 m $A^2\omega^2$ sen^2(10πt) = = 4,93 · 10^{-3} sen^2(10πt) J.

Al representar la gràfica entre t = 0 s i t = T = 0,2 s, s'obté, com sabem una paràbola com la representada en la fig.2.11 del text.

P12. a) L'exemple més conegut **d'ona longitudinal** és *el so*; en les ones sonores es propaga una variació de pressió, i esta ona necessita un mig material per a propagar-se, de manera que la seua velocitat és major en els sòlids que en l'aire, ja que entre d'altres magnituds la velocitat de propagació depèn de la densitat del medi.

Les **ones transversals** més importants són les *electromagnètiques* (OEM), com la llum visible o els rajos X. Estes ones es propaguen amb la màxima velocitat en el buit.

b) En les ones *longitudinals*, el moviment vibratori, o més general, la variació de la pertorbació o magnitud física que caracteritza a l'ona (altura, pressió…) es produeix *en la mateixa direcció* que la propagació de la ona.

Al contrari, en les ones *transversals,* el moviment vibratori, o més general, la variació de la pertorbació o magnitud física que caracteritza a l'ona (altura, pressió…) es produeix *en direcció perpendicular* a la propagació de l'ona.

P13. a) Utilitzem l'equació λ= v T = v/N. Si es duplica el període, λ es duplica.

b) La velocitat d'una ona en una corda depèn de les característiques de la corda (m/L o densitat lineal) i de la tensió; com esta no varia, tampoc variarà v.

P14. a) La raó és que **sen φ=sen (π-φ)**. De l'equació deduïm que k = 2 m^{-1} ω= 4 rad/s; aleshores: $v = \frac{\varpi}{K} = 2$ m/s

b) En l'equació de la velocitat v = dx/dt = -0,4 cos (2x-4t)

se substitueixen els valors x = 1m i v = 0 m/s: 0 = -0,4 cos (2·1-4t) Però com la fase s'expressa en radians: 2-4t = π/2; t = 0,1073s i en general sempre que es complisca que t = (0,1073 + nT) s donada la periodicitat temporal del moviment ondulatori

P15. Comparant amb l'equació: y(x, t) = A sen (ωt - kx + φ_0) obtenim:

a) A = 0,005 m; ω= 2πN = 600π; N = 300 Hz; k = 6 π= 2π/λ; λ = 1/3 m;

v = ω/k = 600π s^{-1}/6π m^{-1} = 100 m/s.

b) $v_{máx}$ = Aω= 0,005 m · 600π s^{-1} = 9,42 m/s.

c) Utilitzem la relació de proporcionalitat $\Delta\varphi = \frac{2\pi\cdot\Delta x}{\lambda}; \Delta x = \frac{\Delta\varphi\cdot\lambda}{2\pi} = 0{,}0417\,m$

P16. a) Utilitzem la relació de proporcionalitat $\Delta\varphi = \frac{2\pi\cdot\Delta x}{\lambda}; \Delta x = \frac{\Delta\varphi\cdot\lambda}{2\pi} = 0{,}0083\,m$

b) L'equació de l'ona, d'acord amb l'enunciat és: y = A cos (ωt -kx) i substituint ω= 20π rad/s, k = 40πm^{-1}:

y = 8 cos (20 1,25π - 40π·0,22) mm = 6,47 mm.

P17. a) Les característiques de l'ona són: ω= 2πN = 50π rad/s; k = 2π/λ= 10π m;

v = ω/k = 50π/ 10 π = 5 m/s.

b) Com en t = 0 i x = 0 ha de ser Ψ = 0, prendrem la funció sinus i el signe positiu en (ωt ± kx) al desplaçar-se la pertorbació en el sentit negatiu de l'eix X: $\Psi = 3\ 10^{-2}$ sen (50πt + 10 πx)] m.

c) $v_{máx}$ = A ω= 0,03 m ·50π s^{-1} = 4,71 m/s; $a_{máx}$ = A ω^2 = 0,03 m · (50π $s^{-1})^2$ = 740,2 m/s^2.

P19. a) De la gràfica deduïm que l'amplitud és A = 2 m i que λ= 8 m; com que v_p = 4 m/s el període serà: T = λ/v = 8/4 = 2 s. Per tant els valors de ω i k són:
ω= 2π/T = 2π/2 = π rad/s; k = 2π/λ= 2π/8 = π/4 m^{-1}.

Finalment, l'equació de l'ona és: **y (x,t) = A sen (ωt – kx); i = 2 sen (πt – πx/4) m.**

b) v_{vib} = dx/dt = 2πcos (πt – πx/4) m/s. Per a x = 4 m, la velocitat de vibració és

v_{vib} = 2πcos (πt - π) m/s i el seu valor màxim: $v_{máx}$ = 2π m/s.

P20. Com per a un front esfèric la intensitat decreix amb $1/r^2$, la intensitat en A és 3^2 = 9 vegades la intensitat en B.

P21. Com es tracta d'un front d'ones esfèriques (S = 4πr^2) tenim:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{100w}{4\pi(10m)^2} = 0{,}08\ w/m^2$$

P23.
$$I = \frac{E}{S\cdot t} = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{10/5}{4\pi\cdot 0{,}5^2} = 0{,}637\ w/m^2$$

Al duplicar la distància, la intensitat es divideix per 4, o siga: I_{100} = 0,159 W/m^2.
b) La intensitat decreix perquè la superfície del front de l'ona augmenta amb r^2.
c) Recordant que la potència és 2 w, aïllem r de la equació general:

$$R = \sqrt{\frac{P}{4\pi\cdot I}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi\cdot 1}} = 0{,}40m$$

d) Com es mostra en el text, I = cte · A^2. Per tant, s'acompleix que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{cte\cdot A_1^2}{cte\cdot A_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2};\ \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Si substituïm valors: $\frac{10cm}{A_2} = \frac{50cm}{10cm}$ $A_2 = 2$ cm

P24. Dades: x = 10 m, I = 0,13 I_0.
Prenent logaritmes neperians en l'equació $I/I_0 = e^{-\beta x}$ i aïllant el coeficient d'absorció obtenim:

$$Ln(I/I_0) = -ßx;\ ß = -Ln(I/I_0)\ /\ x = 0{,}20\ m^{-1}$$

P25. Tenint en compte les dades, l'equació més còmoda és Ln (I/I_0) = - ßx.

Operant, obtenim amb facilitat $ß = -\frac{Ln\frac{I}{I_0}}{x}$ = 0,693 cm^{-1} Si la grossària augmenta a 3 cm, la intensitat final serà: I = $I_0e^{-\beta x}$.= I = $I_0e^{-0{,}693\cdot 3}$.= 0,125 I_0 És a dir, s'ha reduït el 87,5%.

P26. Tenint en compte les dades (el coeficient és ß= 0,4 cm^{-1}, I = $I_0/4$), l'equació més còmoda és Ln (I/I_0) = - ßx. Operant, obtenim amb facilitat x:

$$x = \frac{-\mathrm{Ln}\ {}^{I}\!/_{I_0}}{\beta} = 3{,}47 \text{ cm}$$

P27. Per a veure si és possible la refracció, calculem primer l'angle límit per al so a l'incidir des de l'aire a l'aigua:

sen $ά_L$ = v_1/v_2 = 340/1500 ; $ά_L$ = 13,1º

Per tant es produeix reflexió total perquè l'angle de incidència (75º) és major que l'angle límit aire-aigua per al so (13,1º). Per geometria, deduïm que la desviació del feix és

Δά= 75º + 75º = 150º

P28. Com $\lambda_1 = v_1/N$, deduïm el valor de N:. N = v_1/λ_1= 20 /0,1 = 200 Hz.

a) $v_2 = \lambda_2$ N = 0,5 200 = 100 m/s.

b) Com es propaga en un líquid, l'ona és longitudinal.

c) En efecte, com $v_2 > v_1$, es produeix la reflexió total per a un angle de reflexió superior a l'angle límit:

$ά i_L$ = arcsen (v_1/v_2) = arcsen (20/100) = 11,5º.

P29. a) Llibre pag 38, 39

b) Aplicant la llei de la refracció (Snell) **n_1·sen$ά_1$ = n_2·sen$ά_2$**

o **sen$ά_1$/ sen$ά_2$ = n_2/ n_1 = $n_{1,2}$ = v_1/v_2**

Aïllant sen$ά_2$ = 0,85; $ά_2$ = arc sen 0,85 = 58,21º En efecte, ha de ser $ά_2 > ά_1$.
La longitud d'ona en el mig 1, és: $\lambda_1 = v_1$ T = v_1/N = 10 /10 = 1 m.

P30. A causa de la relació entre la longitud d'ona (diversos centenars de metres) i la grandària de l'obstacle, les ones modulades en amplitud (AM) es difracten a l'interaccionar amb grans edificis o muntanyes. Al contrari, les ones de les emissores de FM (longitud d'ona de l'orde d'1 m) a penes es difracten a l'interaccionar amb els esmentats obstacles, pel que no els poden superar i contornejar; per això, per a ser captades han d'arribar directament al receptor de ràdio, bé des de l'antena emissora o a través d'un repetidor de TV.

P31. a) Segons les dades, λ/2 = 60 cm, per tant λ= 2 · 60 cm = 120 cm = 1,2 m;
v = λ/T = 1,20 /0,2 = 6 m/s.

b) Com l'interval de temps considerat és múltiple sencer de T (Δt = 2 s = 10 T s), la diferència de fase serà Δφ= 2π Δt rad, és a dir, les fases seran equivalents.

P32. Comparant amb l'equació general y(x, t) = A cos (ωt-Kx) = 0,5 cos (40πt - 4πx) obtenim:

a) ω= 2πN = 40π; N = 20 Hz; k = 2π/λ= 4π.; λ = 0,5 m.

b) v = ω /k = 40π /4 π = 10 m/s.

c) Suposant que el punt x equidista dels dos focus, la pertorbació resultant serà la suma de les dos individuals, és a dir: y(x,t)total = 2·0,5 cos (40πt - 4πx) m = cos (40πt - 4πx) m

d) El desfasament entre ambdós pertorbacions es calcula a partir de la diferència de distàncies d'ambdós focus al punt on es produeix la interferència:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0,5}(0,5 - 0,25) = \pi \text{ rad}$$

P33. En ambdós experiments la freqüència és la mateixa (no ha canviat la freqüència de vibració de l'èmbol); però sí que canvia la rapidesa de propagació i amb això la longitud d'ona. Com a N = v/λ= cte, tenim:

$$\frac{v_1}{n\lambda_1} = \frac{v_2}{n\lambda_2}; \frac{340}{25} = \frac{v_2}{35}; \; v_2 = 476 \text{ m/s}$$

P34. Tenint en compte que cos ά = cos (-ά) i comparant amb l'equació general

y(x, t) = A cos (kx -ωt) = A cos (ωt - kx) obtenim:

a) ω= 2πN = 100; N = 50/πHz; k = 2π/λ = 0,2; λ = 10πm. v = ω/k = 100 /0,2 = 500 m/s.

b) Quan y_1 = 0,3 cos (0,2x - 100t) m interfereix amb la que es propaga en sentit contrari,

y_2 = 0,3 cos (0,2x + 100t)m, es produeix una ona estacionària l'equació de la qual és:

y_{total} = 0,3 cos(0,2x - 100t) + 0,3 cos(0,2x + 100t) **= 0,6 cos (0,2x) cos (-100t) m.**

P35. La longitud del tub equival a L= λ/4, la distància entre node i ventre consecutius; per tant: λ= 4 · 0,3 m = 1,2 m.
Finalment, v = λ N = 1,2· 280 = 336 m/s.

P36. a) La longitud de la corda equival a λ/2 quan s'emet el so fonamental; por tant: λ= 2·0,66 m = 1,32 m.

b) v =λ N = 1,32 m · 440 Hz = 580,8 m/s.

P37. *Desplaçament màxim:*
Cada punt de la corda realitza un MAS l'amplitud del qual ve donada per l'equació:

y(x,t) = 0,02 sen (4πx)·cos(60πt). A = 0,02 sen (4πx)·

Si x = 1,1 m, A = $y_{máx}$ = 0,02 · sen (4π· 1,1) m = 0,019 m.

Si x = 0,25 m, $y_{máx}$ = 0,02 · sen (4π· 0,25) m = 0 m.

Si x = 0,5 m, $y_{máx}$ = 0,02 · sen (4π· 05) m = 0 m.

Si x = 0,125 m, $y_{máx}$ = 0,02 · sen (4π· 0,125) m = 0,02 m.

Els resultats són coherents amb el valor de la longitud d'ona:

λ= 2π/k = 2π/4π= 0,5 m

i per això l'amplitud d'oscil·lació és zero per als punts x = λ /2 i x = λ .

Per a x = 1,1 m, $v_{máx}$ = y_{max} ω= 0,019 m · 60π= 3,58 m/s.

Per a x = 0,25 m, $v_{máx}$ = y_{max} ω= 0 m· 60π= 0.

Per a x = 0,5 m, $v_{máx}$ = y_{max} ω= 0 m· 60π= 0.

Per a x = 0,125 m, $v_{máx}$ = y_{max} ω= 0,02 m · 60π= 3,77 m/s.

b) y_1 (x,t) = 0,01 sen (60πt - 4πx)· y_2 (x,t) = 0,01 sen (60πt + 4πx)·

Sabent que sen A+ sen B = 2 cos $\frac{A-B}{2}$ ·sen$\frac{A+B}{2}$

cos A+ cos B = 2 cos $\frac{A-B}{2}$ ·cos$\frac{A+B}{2}$

P44. Només és certa l'afirmació c).

P45.
a) Quan el focus emissor (el dofí) s'acosta a l'observador (el detector del vaixell, en repòs), l'equació que hem d'usar és:

$$N' = N\frac{v}{v - v_F} = 10^4\frac{1500}{1500 - 10} = 10067\text{Hz}$$

b) Quan el focus emissor (el dofí) s'allunya del vaixell (observador en repòs), en l'equació anterior devem canviar el signe de v_F:

$$N' = N\frac{v}{v + v_F} = 10^4\frac{1500}{1500 + 10} = 9937\text{Hz}$$