

## EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 ¿A qué valor tiende la función  $f(x) = \frac{2}{x-5}$ ?

a) Cuando  $x$  se acerca a 3.

c) Cuando  $x$  se acerca a  $+\infty$ .

b) Cuando  $x$  se aproxima a 5.

d) Cuando  $x$  se aproxima a  $-\infty$ .

a)  $x$  se aproxima a 3 por la izquierda:  $x \rightarrow 3^-$

$x$  se aproxima a 3 por la derecha:  $3^+ \leftarrow x$

$x$	...	2,99	2,999	2,9999	...	3	...	3,0001	3,001	3,01	...
$f(x) = \frac{2}{x-5}$	...	-0,995	-0,9995	-0,99995	...	-1	...	-1,00005	-1,0005	-1,005	...

Cuando  $x$  se acerca a 3, se verifica que  $f(x)$  tiende a  $-1$ .

b)  $x$  se aproxima a 5 por la izquierda:  $x \rightarrow 5^-$

$x$  se aproxima a 5 por la derecha:  $5^+ \leftarrow x$

$x$	...	4,99	4,999	4,9999	...	5	...	5,0001	5,001	5,01	...
$f(x) = \frac{2}{x-5}$	...	-200	-2000	-20 000	...	No está definido	...	20 000	2000	200	...

Cuando  $x$  se acerca a 5 por la izquierda, se verifica que  $f(x)$  tiende a  $-\infty$ .

Cuando  $x$  se acerca a 5 por la derecha, se verifica que  $f(x)$  tiende a  $+\infty$ .

c)  $x$  tiende a  $+\infty$ :  $x \rightarrow +\infty$

Cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ ,  $f(x)$  tiende a 0.

$x$	...	1000	...	100 000	...	$+\infty$
$f(x) = \frac{2}{x-5}$	...	0,002	...	0,00002	...	0

d)  $x$  tiende a  $-\infty$ :  $-\infty \leftarrow x$

Cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ ,  $f(x)$  tiende a 0.

$x$	$-\infty$	...	-100 000	...	-1000	...	0
$f(x) = \frac{2}{x-5}$	0	...	-0,00002	...	-0,002	...	-0,4

11.2 Indica a qué valor tiende la función  $g(x) = \frac{3x+2}{x(x+2)}$ .

a) Cuando  $x$  se aproxima a 4.

c) Cuando  $x$  se aproxima a  $+\infty$ .

b) Cuando  $x$  se acerca a 0.

d) Cuando  $x$  se acerca a  $-\infty$ .

a)  $x$  se aproxima a 4 por la izquierda:  $x \rightarrow 4^-$

$x$  se aproxima a 4 por la derecha:  $4^+ \leftarrow x$

$x$	...	3,99	3,999	3,9999	...	4	...	4,0001	4,001	4,01	...
$g(x) = \frac{3x+2}{x(x+2)}$	...	0,5845	0,5834	0,5833	...	$\frac{14}{24}$	...	0,5833	0,5832	0,5822	...

Cuando  $x$  se acerca a 5, se verifica que  $g(x)$  tiende a  $0,58\hat{3} = \frac{14}{24}$ .

b)  $x$  se aproxima a 0 por la izquierda:  $x \rightarrow 0^-$

$x$  se aproxima a 0 por la derecha:  $0^+ \leftarrow x$

$x$	...	-0,01	-0,001	-0,0001	...	0	...	0,0001	0,001	0,01	...
$g(x) = \frac{3x+2}{x(x+2)}$	...	-98,99	-998,99	-9998,99	...	No está definido	...	10000,99	1000,99	100,99	...

Cuando  $x$  se acerca a 0 por la izquierda, se verifica que  $g(x)$  tiende a  $-\infty$ .

Cuando  $x$  se acerca a 0 por la derecha, se verifica que  $g(x)$  tiende a  $+\infty$ .

c) y d)  $x$  tiende a  $-\infty$ :  $-\infty \leftarrow x$

$x$  tiende a  $+\infty$ :  $x \rightarrow +\infty$

$x$	$-\infty$	...	-100 000	...	-1000	...	0	...	1000	...	100 000	...	$+\infty$
$g(x) = \frac{3x+2}{x(x+2)}$	0	...	-0,00003	...	-0,003	...	No está definido	...	0,0029	...	0,000029	...	0

Cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ ,  $g(x)$  tiende a 0.

Cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ ,  $g(x)$  tiende a 0.

### 11.3 Halla el límite de la función $f(x) = 3x^2 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -3$ .

$x$  se aproxima a 1 por la izquierda:  $x \rightarrow 1^-$

$x$  se aproxima a 1 por la derecha:  $1^+ \leftarrow x$

$x$	...	0,99	0,999	0,9999	...	1	...	1,0001	1,001	1,01	...
$f(x) = 3x^2 + 3$	...	5,9403	5,994003	5,99940003	...	6	...	6,0006	6,006	6,06	...

$x$  se aproxima a -3 por la izquierda:  $x \rightarrow -3^-$

$x$  se aproxima a -3 por la derecha:  $-3^+ \leftarrow x$

$x$	...	-3,01	-3,001	-3,0001	...	-3	...	-2,9999	-2,999	-2,99	...
$f(x) = 3x^2 + 3$	...	30,1803	30,018	30,0018	...	30	...	29,9982	29,98	29,82	...

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 3) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (3x^2 + 3) = 30$$

### 11.4 Calcula el límite de la función $g(x) = \frac{3x+1}{x(x+5)}$ en los puntos $x = 1$ y $x = 0$ .

$x$  se aproxima a 1 por la izquierda:  $x \rightarrow 1^-$

$x$  se aproxima a 1 por la derecha:  $1^+ \leftarrow x$

$x$	...	0,99	0,999	0,9999	...	1	...	1,0001	1,001	1,01	...
$g(x) = \frac{3x+1}{x(x+5)}$	...	0,6695	0,66694	0,666694	...	$\frac{2}{3}$	...	0,66664	0,6664	0,664	...

$x$  se aproxima a 0 por la izquierda:  $x \rightarrow 0^-$

$x$  se aproxima a 0 por la derecha:  $0^+ \leftarrow x$

$x$	...	-0,01	-0,001	-0,0001	...	0	...	0,0001	0,001	0,01	...
$g(x) = \frac{3x+1}{x(x+5)}$	...	-19,44	-199,44	-1999,44	...	No está definido	...	2000,56	200,56	20,56	...

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x(x+5)} = \frac{2}{3}$$

Cuando  $x$  tiende a 0 por la izquierda, el límite tiende a  $-\infty$ .

Cuando  $x$  tiende a 0 por la derecha, el límite tiende a  $+\infty$ .

**11.5** Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

$x$  tiende a  $-\infty$ :  $-\infty \leftarrow x$

$x$  tiende a  $+\infty$ :  $x \rightarrow +\infty$

$x$	$-\infty$	...	$-100\,000$	...	$-1000$	...	$0$	...	$1000$	...	$100\,000$	...	$+\infty$
$g(x) = \frac{1}{x^2}$	$0$	...	$10^{-10}$	...	$10^{-6}$	...	No está definido	...	$10^{-6}$	...	$10^{-10}$	...	$0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

**11.6** Halla  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+2}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+2}$

$x$  tiende a  $-\infty$ :  $-\infty \leftarrow x$

$x$  tiende a  $+\infty$ :  $x \rightarrow +\infty$

$x$	$-\infty$	...	$-100\,000$	...	$-1000$	...	$0$	...	$1000$	...	$100\,000$	...	$+\infty$
$g(x) = \frac{3x-1}{x+2}$	$3$	...	$3,00007$	...	$3,007$	...	$\frac{-1}{2}$	...	$2,993$	...	$2,99993$	...	$3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3$$

**11.7** Dadas  $f(x) = \frac{5x}{x+1}$  y  $g(x) = \frac{-2x+3}{x-4}$ , calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot g(x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x+1} = 5$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x+1} \cdot \frac{(-2x+3)}{x-4} = -10$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{x-4} = -2$$

**11.8** Dada la función  $f(x) = \frac{5x+3}{2x+1}$ , halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} 4f(x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+3}{2x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (5x+3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)} = \frac{5 \cdot 1 + 3}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{8}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{5x+3}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{5x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (5x+3)} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{5 \cdot 1 + 3} = \frac{3}{8}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} 4 \left(\frac{5x+3}{2x+1}\right) = 4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+3}{2x+1} = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

11.9 Dadas las funciones  $f(x) = 5x + 3$  y  $g(x) = \frac{5x^2 - x + 7}{x + 1}$  calcula estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$       d)  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 3) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - x + 7}{x + 1} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5x + 3 - \frac{5x^2 - x + 7}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3x + 5x + 3 - 5x^2 + x - 7}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x - 4}{x + 1} = 9$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - x + 7}{x + 1} = +\infty$

11.10 Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{\frac{x+2}{2}}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+5}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{2x+5}$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{x^2 - 3}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{\frac{x+2}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1+2}{x+1} \right)^{\frac{x+2}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x+2}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \right)^{\frac{x+2}{2}} \right]^{\frac{x+2}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1}} = e$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+5} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+5) \left( \frac{1}{x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{x}} = e^2$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{2x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1+2}{x+1} \right)^{2x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x+1} \right)^{2x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \right)^{\frac{x+1}{2}} \right]^{\frac{2(2x+5)}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+10}{x+1}} = e^4$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{x^2 - 3} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) \left( \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) \frac{2x+1}{x^2}} = e^{+\infty} = +\infty$

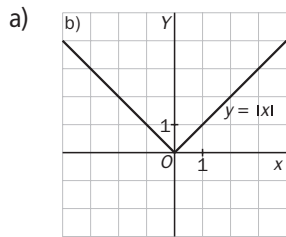
11.11 Construye una tabla que recoja si las funciones estudiadas en los ejemplos de esta página están definidas en  $x = 2$ , si existe el límite en ese punto, si ambas cantidades coinciden y si las funciones son continuas en él.

	$f(2)$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$	¿continua en $x = 2$ ?	
$f(x) = E(x)$	2	$\lim_{x \rightarrow 2} E(x)$ no existe	No coincide	No	
$g(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$	1	$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 5$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 5$	$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$	No coincide	No
$h(x) = x^2$	4	$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$	Coincide	Sí	

11.12 Estudia la continuidad de estas funciones.

a)  $|x|$

b)  $y = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 1 & x > 0 \end{cases}$



A la vista de la gráfica, la función  $|x|$  es continua en todo su dominio.

b) La función  $f(x)$  está definida por dos trozos, uno lineal y el otro cuadrático; en consecuencia, continua en sus dominios, respectivamente. Veamos si es continua en el punto de unión de ambos trozos, es decir, en  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$$f(0) = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$ . Por tanto,  $f$  es continua en toda la recta real.

11.13 Estudia la continuidad de estas funciones.

a)  $f(x) = \frac{2}{x+5}$

b)  $g(x) = +\sqrt{x}$

d)  $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

c)  $j(x) = \sqrt{2 + x^2}$

a) La función  $f(x) = \frac{2}{x+5}$  es continua en toda la recta real excepto en  $x = -5$ , ya que no existe  $f(-5)$  al anularse el denominador en  $x = -5$ .

b) La función  $g(x) = +\sqrt{x}$  es continua en todo su dominio,  $[0, +\infty)$ .

c) La función  $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  es continua en toda la recta real excepto en  $x = -1$ , ya que no existe  $h(-1)$  al anularse el denominador en  $x = -1$ .

d) La función  $j(x) = \sqrt{2 + x^2}$  es continua en todo su dominio,  $\mathbf{R}$ .

11.14 Analiza la continuidad de la siguiente función. ¿Cuál es su verdadero valor en  $x = 3$ ?

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  es una función continua en  $\mathbf{R} - \{3\}$ . Veamos si  $g(x)$  es continua en 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Como la función en  $x = 3$ , vale 2, se deduce que  $f(x)$  es discontinua en  $x = 3$ .

Para que  $g(x)$  fuese continua en  $x = 3$ , tendría que suceder que  $g(3) = 6$ .

11.15 ¿Crees que soltando inicialmente el doble de peces se llenaría el estanque en la mitad de tiempo?

Estudia la función correspondiente,  $N(t) = \frac{150}{1 + 6,5 \cdot 1,05^{-t}}$

Construimos la tabla de valores de la función.

Años	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ejemplares	20	32	50	71	92	111	126	135	141	145	147
Incremento		62,36	53,19	42,09	30,61	20,55	12,92	7,75	4,51	2,58	1,46

Años	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ejemplares	148	149	150	150	150	150	150	150	150	150
Incremento	0,82	0,46	0,26	0,14	0,08	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01

La capacidad máxima del estanque es de 150 carpas y se alcanza en el año 13. Por tanto, el soltar el doble de número de peces no implica que el estanque se llene en la mitad de tiempo.

Hasta el sexto año, la población del estanque crece a un ritmo anual superior al 10 %, estabilizándose en el año 13 en torno a los 150 ejemplares.

11.16 ¿Qué ocurriría si soltáramos los 10 peces en un estanque con una capacidad máxima de 300? Analiza

la función correspondiente,  $N(t) = \frac{300}{1 + 29 \cdot 1,05^{-t}}$

Años	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ejemplares	10	17	30	50	79	118	161	203	237	261	277
Incremento		74,94	71,62	66,34	58,58	48,41	36,90	25,86	16,82	10,34	6,11

Años	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ejemplares	287	292	296	298	299	299	300	300	300	300
Incremento	3,52	2,00	1,13	0,63	0,35	0,20	0,11	0,06	0,03	0,02

La capacidad máxima del estanque se alcanza en el año 17. Hasta el noveno año, la población crece a un ritmo anual superior al 10 %, estabilizándose en el año 14-15 en torno a los 300 ejemplares.

# ACTIVIDADES

## EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

### Concepto de límite

11.17 Utilizando una tabla, halla el valor al que tienden las siguientes funciones cuando  $x$  se acerca a  $+\infty$ .

a)  $f(x) = 4x^2 + 5$     b)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$     c)  $f(x) = 3x - 2x^3$     d)  $f(x) = \frac{x+1}{2x+6}$

a)

$x$	100	1000	10000	100000	$\rightarrow +\infty$
$f(x)$	4005	4000005	400000005	40000000005	$\rightarrow +\infty$

b)

$x$	100	1000	10000	$\rightarrow +\infty$
$f(x)$	0,010204	0,001002004	0,00010002	$\rightarrow 0$

c)

$x$	100	1000	10000	$\rightarrow +\infty$
$f(x)$	-1999700	-1999997000	-1,99999997·10 <sup>12</sup>	$\rightarrow -\infty$

d)

$x$	100	1000	10000	$\rightarrow +\infty$
$f(x)$	0,49	0,499	0,4999	$\rightarrow 0,5$

11.18 Halla el valor al que tienden las funciones del ejercicio anterior cuando  $x$  se aproxima a  $-\infty$ . ¿En qué apartados obtienes el mismo resultado que en el ejercicio anterior?

a)

$x$	-100	-1000	-10000	-100000	$\rightarrow -\infty$
$f(x)$	4005	4000005	400000005	40000000005	$\rightarrow +\infty$

b)

$x$	-100	-1000	-10000	$\rightarrow -\infty$
$f(x)$	-0,0098	-0,000998	-0,00009998	$\rightarrow 0$

c)

$x$	-100	-100	-1000	-10000	$\rightarrow -\infty$
$f(x)$	1999700	-1999700	1999997000	1,99999997·10 <sup>12</sup>	$\rightarrow +\infty$

d)

$x$	-100	-1000	-10000	$\rightarrow -\infty$
$f(x)$	0,51	0,501	0,5001	$\rightarrow 0,5$

Se obtiene el mismo resultado en los apartados a, b y d.

11.19 Calcula la tendencia de las siguientes funciones cuando  $x$  se acerca a 3, distinguiendo si es por la derecha o por la izquierda.

a)  $y = 5x - 8$

b)  $y = \frac{x}{x + 1}$

c)  $y = 7 - x^2$

d)  $y = \frac{6}{x}$

a)

2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3^-$
6,5	6,95	6,995	$\rightarrow 7$

3,1	3,01	3,001	$\rightarrow 3^+$
7,5	7,05	7,005	$\rightarrow 7$

b)

2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3^-$
0,74	0,749	0,7499	$\rightarrow 0,75$

3,1	3,01	3,001	$\rightarrow 3^+$
0,756	0,7506	0,75006	$\rightarrow 0,75$

c)

2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3^-$
-1,41	-1,9401	-1,994	$\rightarrow -2$

3,1	3,01	3,001	$\rightarrow 3^+$
-2,61	-2,0601	-2,006	$\rightarrow -2$

d)

2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3^-$
2,068	2,0066	2,000666	$\rightarrow 2$

3,1	3,01	3,001	$\rightarrow 3^+$
1,935	1,9933	1,999333	$\rightarrow 2$

11.20 ¿Cuál es el límite de estas funciones cuando  $x$  tiende a 4?

a)  $f(x) = \frac{2}{x - 4}$

b)  $f(x) = \frac{x}{(x - 4)^2}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

d)  $f(x) = \frac{x + 1}{4 - x}$

a)

3,9	3,99	3,999	$\rightarrow 4^-$
-20	-200	-2000	$\rightarrow -\infty$

4,1	4,01	4,001	$\rightarrow 4^+$
20	200	2000	$\rightarrow +\infty$

Como no coinciden los límites laterales en  $x = 4$ , no existe el límite de la función en dicho punto.

b)

3,9	3,99	3,999	$\rightarrow 4^-$
390	39900	39999000	$\rightarrow +\infty$

4,1	4,01	4,001	$\rightarrow 4^+$
410	40100	4001000	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x - 4)^2} = +\infty$$

c)

3,9	3,99	3,999	$\rightarrow 4^-$
7,9	7,99	7,999	$\rightarrow 8$

4,1	4,01	4,001	$\rightarrow 4^+$
8,1	8,01	8,001	$\rightarrow 8$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$$

d)

3,9	3,99	3,999	$\rightarrow 4^-$
49	499	4999	$\rightarrow +\infty$

4,1	4,01	4,001	$\rightarrow 4^+$
-51	-501	-5001	$\rightarrow -\infty$

Como no coinciden los límites laterales en  $x = 4$ , no existe el límite de la función en dicho punto.



11.21 Halla el límite de las siguientes funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$ :

a)  $f(x) = 2^x$       b)  $f(x) = x^x$       c)  $f(x) = \left(\frac{1}{x-6}\right)^x$       d)  $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x}\right)^x$

a)

50	100	$\rightarrow +\infty$
$1,13 \cdot 10^{15}$	$1,27 \cdot 10^{30}$	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

-50	-100	$\rightarrow -\infty$
$8,88 \cdot 10^{-16}$	$7,88 \cdot 10^{-31}$	$\rightarrow 0$

b)

10	50	$\rightarrow +\infty$
$10^{10}$	$8,88 \cdot 10^{89}$	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^x = 0$$

-10	-50	$\rightarrow -\infty$
$10^{-10}$	$1,12 \cdot 10^{-85}$	$\rightarrow 0$

c)

10	100	$\rightarrow +\infty$
0,000000953	$1,2 \cdot 10^{-23}$	$\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-6}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-6}\right)^x = +\infty$$

-10	-100	$\rightarrow -\infty$
$1,1 \cdot 10^{12}$	$2,57 \cdot 10^{87}$	$\rightarrow +\infty$

d)

10	100	$\rightarrow +\infty$
0,0025	$2,13 \cdot 10^{-30}$	$\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{2x}\right)^x = +\infty$$

-10	-100	$\rightarrow -\infty$
2936,8	$3,46 \cdot 10^{30}$	$\rightarrow +\infty$

11.22 Calcula la tendencia de estas funciones en los puntos que se indican:

a)  $y = \sqrt{\frac{x+6}{x-2}}$  cuando  $x \rightarrow 3$       b)  $y = (1+x)^{\frac{1}{x-2}}$ , cuando  $x \rightarrow 2$       c)  $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$  cuando  $x \rightarrow 0$

a)

2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3^-$
3,1446	3,013	3,0013	$\rightarrow 3$

3,1	3,01	3,001	$\rightarrow 3^+$
2,88	2,99	2,999	$\rightarrow 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x+6}{x-2}} = 3$$

b)

1,9	1,99	$\rightarrow 2^-$
0,0000237	$2,71 \cdot 10^{-48}$	$\rightarrow 0$

2,1	2,01	$\rightarrow 2^+$
81962,83	$7,19 \cdot 10^{47}$	$\rightarrow +\infty$

Al no coincidir los límites laterales no existe el límite.

c)

-0,1	-0,01	-0,001	$\rightarrow 0^-$
1,077	1,007	1,0007	$\rightarrow 1$

0,1	0,01	0,001	$\rightarrow 0^+$
0,937	0,993	0,9993	$\rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = 1$$

## Cálculo de límites

11.23 Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -4} (2x + 6)^{x-4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x - x^2}{x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{9 - 5x} \right)^0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 6} \left( \frac{6 - x}{2x + 3} \right)^x$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3) = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -4} (2x + 6)^{x-4} = \frac{1}{256}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x - x^2}{x - 2} = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{9 - 5x} \right)^0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 6} \left( \frac{6 - x}{2x + 3} \right)^x = 0$$

11.24 Halla estos límites de funciones en el infinito:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 + x - 1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (8 - x^4)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^3)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x + x^3)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 + x - 1) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (8 - x^4) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^3) = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x + x^3) = -\infty$$

11.25 Indica cuáles de los siguientes límites dan lugar a una indeterminación y cuál es esta:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - 3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 8}{x - 1}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - 3x} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminación}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 5} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ indeterminación}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 8}{x - 1} = \frac{-4}{0}, \text{ indeterminación}$$

11.26 Halla los siguientes límites en el infinito:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x}{x^2 - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^2}{x^3 - 2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + x + x^2}{5x^2 - x + 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - x^2}{2x^3 + 3x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x}{x^2 - 2} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^2}{x^3 - 2x} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + x + x^2}{5x^2 - x + 1} = \frac{1}{5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - x^2}{2x^3 + 3x} = 2$$

11.27 Calcula los límites que se indican:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 2}{x^2 - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x}{x^3 + 4x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = 6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2} = 6$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 2}{x^2 - 1} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x}{x^3 + 4x} = -\frac{1}{4}$$

11.28 Halla el valor de estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3-4x}{x+2} \right)^{\frac{1}{x}}$     c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x+2} \right)^x$     e)  $\lim_{x \rightarrow -4} \left( \frac{x^2+6x+8}{4x+4} \right)^{x+5}$     g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{3x-2} \right)^{x^2}$     i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2-2x+2} \right)^{x+1}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-8x^2}{x^4-x^2}$     d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x$     f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5}{x-3}$     h)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)^{x^2}$     j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6x-5}{2x+3} \right)^{1-x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3-4x}{x+2} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$

f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-5}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-5}{x-3} = +\infty \end{cases}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-8x^2}{x^4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2(x-2)}{x^2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x-2)}{x^2-1} = 8$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{3x-2} \right)^{x^2} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x+2} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{x+2} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2}} = e$

h)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)^{x^2} = \left( \frac{7}{4} \right)^4$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{-x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{-x} \right)^{-x} \right]^{-1} = \frac{1}{e}$     i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2-2x+2} \right)^{x+1} = 1$

e)  $\lim_{x \rightarrow -4} \left( \frac{x^2+6x+8}{4x+4} \right)^{x+5} = 0$

j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6x-5}{2x+3} \right)^{1-x} = 0$

11.29 Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-1}{x+2} - \frac{2x^2+x}{2x} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{3x-2} \right)^{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3+3x^2+3x+1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x+1}{x-3} - \frac{x^2-2}{x^2-9} \right)$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-1}{x+2} - \frac{2x^2+x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3-2x-2x^3-4x^2-x^2-2x}{2x(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2-4x}{2x^2+4x} = -\frac{5}{2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3+3x^2+3x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)^2}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty \end{cases}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x+1}{x-3} - \frac{x^2-2}{x^2-9} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x+3) - (x^2-2)}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x+1}{x^2-9} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x+1}{x^2-9} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x+1}{x^2-9} = +\infty \end{cases}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{3x-2} \right)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left( \frac{3x+1}{3x-2} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(x-1)}{3x-2}} = e$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4} = \infty$

## Continuidad

11.30 Calcula  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ , siendo

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{si } x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

¿En qué punto es posible que  $f(x)$  sea discontinua?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (4 - 8x) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (4 - 8x) = -20 \qquad \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 1) = 2$$

Al no coincidir los límites laterales en  $x = 3$ , no existe el límite de la función en ese punto.

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6} (x - 1) = 5$$

Es una función definida a trozos, formada por funciones lineales. Solo puede ser discontinua en el punto  $x = 3$ .

11.31 Dada la función  $f(x) = \frac{2x - 6}{x + 3}$ :

a) Calcula  $f(-3)$ .

b) Halla  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ .

c) ¿Es continua en  $x_0 = -3$ ?

a) No se puede obtener  $f(-3)$ .

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x - 6}{x - 3} = 2$$

c) No, ya que no existe  $f(-3)$ .

11.32 Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

a)  $f(x) = x^2 + 1$  en  $x_0 = 0$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ 4x + 5 & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = -1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + 2 & \text{si } x > 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 5x - x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 2$$

a) 1)  $f(0) = 1$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Es continua en  $x = 0$ .

b) 1)  $f(1) = 2$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{4} + 2 \right) = \frac{9}{4} \qquad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2. \text{ No existe límite de } f(x) \text{ en } x = 1. \text{ La función no es continua en } x = 1.$$

c) 1)  $f(-1) = 1$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^-} (3 - 2x^2) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow -1^+} (4x + 5) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

3)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ . La función es continua en  $x = -1$ .

d) 1)  $f(2) = 6$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (5x - x^2) = 6$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ . La función es continua en  $x = 2$ .

**11.33** Comprueba si son continuas las siguientes funciones definidas a trozos y, en caso negativo, especifica el tipo de discontinuidad que presentan:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} + x & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{3} & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x} & \text{si } x \geq 8 \\ 2x - 6 & \text{si } x < 8 \end{cases}$$

a) La función  $f$  es una función definida a trozos formada por una función cuadrática y otra constante, que son continuas en su dominio de definición. Por tanto,  $f$  es continua al menos en  $\mathbf{R} - \{-2\}$ . Veamos qué pasa en  $x = -2$ .

$$1) f(-2) = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^2}{4} + x \right) = -1$$

3)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$ .  $f(x)$  no es continua en  $x = -2$ , presenta una discontinuidad evitable.

b) La función  $f$  es una función definida a trozos formada por una función cuadrática y otra lineal, que son continuas en su dominio de definición. Por tanto,  $f$  es continua al menos en  $\mathbf{R} - \{-1\}$ . Veamos que pasa en  $x = -1$ .

$$1) f(-1) = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{x+4}{3} \right) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow -1^+} (2 - x^2) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

3)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ .  $f(x)$  es continua en  $x = -1$ .

c) La función  $f$  es una función definida a trozos formada por una función lineal y otra de proporcionalidad inversa, que son continuas en  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R} - \{0\}$ . Por tanto,  $f$  es continua al menos en  $\mathbf{R} - \{8\}$ . Veamos qué pasa en  $x = 8$ .

$$1) f(8) = \frac{3}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 8^+} \left( \frac{6}{x} \right) = \frac{3}{4} \qquad \lim_{x \rightarrow 8^-} (2x - 6) = 10$$

Los límites laterales existen, pero no coinciden; la función no es continua en  $x = 8$ , presenta una discontinuidad de salto.

**11.34** Considera la función  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x-3}$ :

a) Calcula su dominio.

b) ¿Es continua en los puntos que no pertenecen al dominio?

c) Indica qué tipo de discontinuidad presenta en los puntos  $x_0 = 1$  y  $x_0 = -3$ .

$$\text{a) } D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 1\}$$

b) No es continua porque la función no está definida en ellos.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2+2x-3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$f(x)$  presenta en  $x = 1$  una discontinuidad de segunda especie, y en  $x = -3$ , una evitable.

11.35 Estudia las posibles discontinuidades de la siguiente función y aclara de qué tipo son.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 4x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \frac{x^3}{3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$f(x)$  es una función definida a trozos, formada por dos funciones polinómicas y por una racional cuyo dominio es  $\mathbf{R} - \{-1\}$ . Por tanto, la función  $f(x)$  es continua al menos en  $\mathbf{R} - \{-1, 2\}$ . Veamos qué sucede en esos puntos.

I)  $f(-1) = 5$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 4x) = 5$$

No existe el límite de la función en  $x = -1$ , ya que uno de los límites laterales no es finito; por tanto, la función presenta en  $x = -1$  una discontinuidad de segunda especie.

II)  $f(2) = \frac{8}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4x) = -4 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Los límites laterales no coinciden; por tanto, en  $x = 2$  la función presenta una discontinuidad de salto finito.

#### CUESTIONES PARA ACLARARSE

11.36 Si  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 6$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 9$ , ¿cuál es  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ?

No existe el límite en 0 porque los laterales no coinciden.

11.37 En ocasiones, al hallar el límite de una función en un punto se calculan los límites laterales, pero otras veces no.

¿En qué tipo de funciones es conveniente calcular esos límites laterales porque es posible que los resultados sean diferentes?

En las funciones que no están definidas en esos puntos y en las que están definidas a trozos y el valor de la función cambia en ese punto.

11.38 Explica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- Una función es continua en un punto si existe el límite de la función en ese punto.
- Si una función es constante, el límite de la función en cualquier punto es siempre el mismo.
- Dos funciones con el mismo límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  son iguales.
- El límite de una función en un punto puede tomar dos valores distintos.

- Falsa. Además debe estar definida en el punto y coincidir este valor con el límite de la función en ese punto.
- Verdadera.
- Falsa.  $f(x) = x + 1$  y  $f(x) = x$  tienen el mismo límite en el infinito y no son iguales.
- Falsa. El límite de una función en un punto, si existe, es único.

11.39 La función  $f$  es continua en  $\mathbf{R}$  y  $f(5) = 9$ . ¿Cuál es  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ ?

Al ser continua en  $\mathbf{R}$ , en particular lo es en 5 y, por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 9$ .

11.40 Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  y  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$ , calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} [f - 2g](x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} [(f)^g](x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} [f \cdot g](x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} [f - 2g](x) = 5 - 2 \cdot (-1) = 7$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} [f \cdot g](x) = 5 \cdot (-1) = -5$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} [(f)^g](x) = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5}{-1} = -5$

11.41 El dominio de una función,  $f(x)$ , es  $\mathbb{R} - \{2\}$  y  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$ . ¿Es continua en  $x_0 = 2$ ?

Si la respuesta es negativa, indica el tipo de discontinuidad que presenta.

No es continua, es discontinua evitable.

11.42 Sabiendo  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 7$  y  $g(7) = -2$ , calcula  $\lim_{x \rightarrow -3} (g \circ f)(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3} (g \circ f)(x) = g[\lim_{x \rightarrow -3} f(x)] = g(7) = -2$$

11.43 Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^g)(x)$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^g)(x) = +\infty$

11.44 Si una función,  $f(x)$ , está acotada, ¿es posible que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ? ¿Y que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ?

No es posible ninguna de las dos cosas, puesto que significaría que a valores muy grandes o muy pequeños de  $x$  les corresponden valores muy grandes y muy pequeños, respectivamente, de  $y$ . Pero si la función está acotada, los valores de  $y$  estarán comprendidos entre dos números reales.

### PROBLEMAS PARA APLICAR

11.45 Jaime ha empezado a trabajar en el departamento de atención al cliente de una compañía de telefonía móvil. El número de llamadas diarias que atiende un empleado viene expresado por la siguiente función.

$$N(t) = \frac{72t}{t + 9}$$

Donde  $t$  es el número de días que lleva trabajando.

¿Cuántas llamadas diarias atenderá Jaime cuando lleve mucho tiempo en esa compañía?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{72t}{t + 9} = 72 \text{ llamadas diarias atenderá Jaime.}$$

11.46 Cuando existían 3 000 000 de ejemplares de una especie vegetal, esta comenzó a ser atacada por una plaga. Con el paso del tiempo, su población en millones,  $f(t)$ , disminuyó según la función:

$$f(t) = \frac{3}{t^2 + 1}$$

En la que  $t$  es el número de años transcurridos.

Cuando hayan transcurrido muchos años, ¿a qué valor tenderá el número de ejemplares?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{t^2 + 1} = 0 \text{ es el valor al que tenderá el número de animales de esa especie.}$$

11.47 Un determinado automóvil emite 121 gramos de  $\text{CO}_2$  por cada kilómetro recorrido,  $x$ .

a) Escribe la fórmula que exprese la cantidad de gramos de  $\text{CO}_2$  emitidos en función del número de kilómetros.

b) Según que el automóvil vaya recorriendo más kilómetros, ¿tenderá a estabilizarse la cantidad total de  $\text{CO}_2$  emitida por este vehículo?

a)  $f(x) = 2,10x$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2,10x = \infty$

11.48 En una práctica de Química se ha medido la temperatura de una sustancia durante el transcurso de una reacción que dura 24 horas. Las medidas obtenidas se ajustan a esta función, donde  $t$  es el tiempo en horas.

$$T(t) = \begin{cases} t^2 - 11t - 2 & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ 2t - 14 & \text{si } 12 \leq t < 15 \\ 64 - \frac{16}{5}t & \text{si } 15 \leq t < 24 \end{cases}$$

Estudia si la temperatura anterior es una función continua.

La temperatura es una función a trozos, formada por funciones polinómicas, continuas en su dominio de definición. Estudiemos la continuidad en  $t = 12$  y  $t = 15$ .

$$T(12) = 2 \cdot 12 - 14 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 12^-} (t^2 - 11t - 2) = 10 \quad \lim_{x \rightarrow 12^+} (2t - 14) = 10 \quad \lim_{x \rightarrow 12} T(t) = 10 \quad \lim_{x \rightarrow 12} T(t) = T(12)$$

$$T(15) = 64 - \frac{16}{5} \cdot 15 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 15^-} (2t - 14) = 16 \quad \lim_{x \rightarrow 15^+} \left(64 - \frac{16}{5}t\right) = 16 \quad \lim_{x \rightarrow 15} T(t) = 16 \quad \lim_{x \rightarrow 15} T(t) = T(15)$$

La función de la temperatura es continua.

11.49 En un país, se ha estimado que la tasa de fecundidad, el número de hijos que tiene una mujer, va a evolucionar con el número de años transcurridos,  $t$ , según esta expresión.

$$f(t) = \frac{3t^2 + 1}{2t^2 + 3}$$

Con el paso del tiempo, ¿tenderá a estabilizarse este índice o aumentará?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3t^2 + 1}{2t^2 + 3} = \frac{3}{2}. \text{ Tenderá a estabilizarse de modo que cada mujer tendrá una media de 1,5 hijos.}$$

11.50 En un hospital se está probando un tratamiento contra una enfermedad que reduce la vida media de los glóbulos rojos.

En los pacientes a los que se ha aplicado se ha encontrado que la vida media de los glóbulos rojos,  $V$ , varía dependiendo de la duración del tratamiento en días,  $t$ , según la expresión:

$$V(t) = \frac{132t}{t + 1}$$

a) Si se empleara el tratamiento indefinidamente, ¿se podría alargar la vida de los glóbulos rojos de modo que nunca murieran?

b) La vida media de estas células en una persona es de 120 días. ¿En qué momento del tratamiento se alcanza esa cifra?

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{132t}{t + 1} = 132$ . No, durarían un máximo de 132 días.

b)  $\frac{132t}{t + 1} = 120 \Rightarrow 132t = 120t + 120 \Rightarrow 12t = 120 \Rightarrow t = 10$  días



11.51 Durante una campaña publicitaria, la cantidad de unidades vendidas de un producto de limpieza,  $C$ , ha dependido del número de veces que ha aparecido su publicidad en televisión,  $x$ .

$$C(x) = 3000 - 10 \cdot 2^{1-x}$$

- a) ¿Cuántas unidades se han vendido al aumentar al máximo posible su publicidad en televisión?  
 b) ¿Ha resultado beneficiosa la campaña?

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3000 - 10 \cdot 2^{1-x}) = 3000$

b) Si  $x = 0 \Rightarrow C(0) = 3000$ . Si no se hubiera hecho publicidad en televisión, se habría vendido el mismo número de unidades que si su aparición en televisión hubiese sido muy elevada, y en este caso hay gastos. Por tanto, la campaña no ha resultado beneficiosa.

11.52 A los 20 años de su fundación, una empresa realizó un cambio en la forma de realizar su contabilidad. En consecuencia, sus beneficios, en millones de euros, se calculan con esta función.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3t + 10}{t} & \text{si } 0 < t \leq 20 \\ at - \frac{193}{2} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

Donde  $t$  es el número de años transcurridos.

¿Cuál debe ser el valor de  $a$  para que el cambio en los beneficios resulte continuo?

$$f(20) = \frac{3 \cdot 20 + 10}{20} = 3,5$$

$$\lim_{t \rightarrow 20^-} \left( \frac{3t + 10}{t} \right) = 3,5$$

$$\lim_{t \rightarrow 20^+} \left( at - \frac{193}{2} \right) = 20a - \frac{193}{2}$$

$$\text{Es continuo si } 3,5 = 20a - \frac{193}{2} \Rightarrow 7 = 40a - 193 \Rightarrow a = 5.$$

## REFUERZO

### Cálculo de límites

11.53 Calcula el valor de los siguientes límites en el infinito:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 5x + 3x^4)$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 + x - 6)$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x + 5x^3}{6x^2 - x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 8x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 12}{2x^2 - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 9x + 2}{6x^4 - x^2 + 1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 5x + 3x^4) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 + x - 6) = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x + 5x^3}{6x^2 - x} = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 8x) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 12}{2x^2} = \frac{3}{2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 9x + 2}{6x^4 - x^2 + 1} = 0$

11.54 Resuelve estos límites.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{5}{2x + 8} \right)^x$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x - 7} \right)^{x+3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + 2}{x + 4} \right)^x$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{5}{2x + 8} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{5}{2x + 8} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2x + 8}} = e^{\frac{5}{2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x - 7} \right)^{x+3} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3) \left( 1 + \frac{2}{x-7} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+3)}{x-7}} = e^2$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + 2}{x + 4} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{x+2}{x+4} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+4}} = e^{-2}$

11.55 Halla los límites que siguen:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x^2 + 4x - 1)$     c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 13x + 12}{x^2 - 3x - 18}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3}{2x^2 + 5x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + x^2)^{3x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x}{x - 9}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{x^2 + 6x + 5}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 1}{2x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x^2 + 4x - 1) = -21$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+2) = 6$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + x^2)^{3x} = 2^3 = 8$

f)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{(x+1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 13x + 12}{x^2 - 3x - 18} = 0$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3}{2x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - x^2)}{x(2x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{2x + 5} = \frac{1}{5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x}{x - 9} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{2x}{x - 9} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x}{x - 9} = +\infty \end{cases}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = -\infty \end{cases}$

Continuidad

11.56 Estudia si son continuas las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a)  $f(x) = \begin{cases} -9 & \text{si } x = -2 \\ 7 + 2x^3 & \text{si } x \neq -2 \end{cases}$  en  $x_0 = -2$

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} & \text{si } x > -3 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \leq -3 \end{cases}$  en  $x_0 = -3$

b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x & \text{si } x < 1 \\ 3x - 10 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  en  $x_0 = 1$

d)  $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{si } x < 5 \\ -6 & \text{si } x = 5 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{si } x > 5 \end{cases}$  en  $x_0 = 5$

a) 1)  $f(-2) = -9$

2)  $\lim_{x \rightarrow -2} (7 + 2x^3) = -9$

3)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$ . La función es continua en  $x_0 = -2$ .

b) 1)  $f(1) = -7$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 8x) = -7$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 10) = -7$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$

3)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ . La función es continua en  $x_0 = 1$ .

c) 1)  $f(-3) = -8$

2)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} (1 - x^2) = -8$      $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{9} = -\frac{1}{3}$ . Los límites laterales no coinciden. La función es discontinua en  $x_0 = -3$ .

d) 1)  $f(5) = -6$

2)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} (4 - 2x) = -6$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} (-x^2 + 5x - 6) = -6$

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -6$

3)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$ . La función es continua en  $x_0 = 5$ .

11.57 Dada la función  $f(x) = \frac{x-2}{4x-8}$ :

a) Calcula  $f(2)$ .

b) Halla  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

c) Explica si es una función continua en  $x_0 = 2$ , indicando en caso contrario el tipo de discontinuidad que presenta.

a) La función no está definida en  $x = 2$ .

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{4x-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{4(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

c) Es discontinua evitable.

11.58 Explica si la función  $f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x+4}$  tiene una discontinuidad evitable en  $x_0 = -4$ .

No está definida en ese punto.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+5x+4}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+1)(x+4)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4} (x+1) = -3$$

Es discontinua evitable, puesto que aunque no está definida en el punto, existe el límite en ese punto.

### AMPLIACIÓN

11.59 Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{7x^3 - 2x^2 + 9x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+2}}{3x} \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 8x}{\sqrt{x^4 + 2}} \quad g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} \right)^x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x+3}{x-1}} \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-4x}{5-4x} \right)^{\frac{1-x^2}{3x}}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{7x^3 - 2x^2 + 9x} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} = \frac{3}{45}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+2}}{3x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x+3}{x-1}} = 2$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 8x}{\sqrt{x^4 + 2}} = 6$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-4x}{5-4x} \right)^{\frac{1-x^2}{3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-x^2}{3x} \right) \left( \frac{1-4x}{5-4x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4(1-x^2)}{3x(5-4x)}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x-1)}{x^2 - x}} = e^2$$

11.60 Indica los puntos de discontinuidad de la función  $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x}$  y señala en cada caso el tipo de discontinuidad que presenta.

$x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 0, 1\} \Rightarrow$  No es continua en  $-3, 0$  y  $1$  porque no está definida.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 12}{x^3 + 2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 4}{x(x - 1)} = \frac{7}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 4}{x(x - 1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 4}{x(x - 1)} = -\infty \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 4}{x(x - 1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 4}{x(x - 1)} = +\infty \end{cases}$$

En  $0$  y  $1$  es discontinua de 2.ª especie, y en  $-3$  es discontinua evitable.

11.61 ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función  $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 14}{x - 2}$ ? ¿Cómo se puede definir la función para que sea continua en todo  $\mathbf{R}$ ?

La función es discontinua en  $x = 2$  porque no está definida en ese punto. Como  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x - 2} = -5$ , presenta una discontinuidad evitable en ese  $x = 2$ .

Para que sea continua en  $\mathbf{R}$ , la nueva definición es:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 14}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ -5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

11.62 Estudia si es evitable la discontinuidad de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Defínela, si es posible, de modo que resulte continua en todo  $\mathbf{R}$ .

La función no está definida en  $x = 1$  y, por tanto, es discontinua en ese punto.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

La nueva definición, para que sea continua en  $\mathbf{R}$ , es:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

11.63 Analiza si es continua esta función, indicando en su caso el tipo de discontinuidad que presenta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - 3x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, formada por dos funciones racionales.  
El dominio de la función es  $\mathbf{R} - \{0\}$ . Por tanto, puede ser discontinua en  $x = 0$  y en  $x = 1$ .

I)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2$ . Es una discontinuidad de segunda especie.

II)  $f(1) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x}{x} = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - 3x - 1} = 1$ . Es una discontinuidad de salto finito.

11.64 Calcula el valor que debe tener  $a$  para que sean correctos estos límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^4 + 5x + 9}}{2x^2 - 1} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 1}{ax} - \frac{x^2 + 3}{x - 1} \right) = -1$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^4 + 5x + 9}}{2x^2 - 1} = \frac{\sqrt{a}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{2} = 2 \Rightarrow a = 16$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 1}{ax} - \frac{x^2 + 3}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - x + 1 - ax^3 - 3ax}{ax^2 - ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - a)x^3 - 2x^2 - (1 + 3a)x + 1}{ax^2 + ax} = -1$$

Para que esa igualdad sea cierta, los grados de los polinomios deben ser iguales.

Entonces,  $2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$

Se puede comprobar que en ese caso el límite es  $-1$ .

### PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

11.65 El precio de los cuadernos

Una papelería presenta la siguiente oferta para estudiantes en la compra de cuadernos.

- El precio de cada uno es de 2,25 euros.
- Si se compran ocho o más, el precio  $P$  de todo el lote es el determinado por la función:

$$P(x) = \sqrt{5x^2 + 3}$$

Donde  $x$  es el número de cuadernos comprados.

- Calcula el precio que se ha de pagar para comprar 5, 10 y 15 unidades.
- La función que representa el precio de  $x$  cuadernos, ¿es continua?
- Halla el precio de cada cuaderno si se compran 5, 10 ó 15 unidades.
- ¿Cuál sería el precio de cada cuaderno si se comprase una gran cantidad de ellos?
- Un cliente tiene dudas sobre si se trata de una verdadera oferta o una estrategia publicitaria. ¿Crees que se produce un descuento apreciable cuando se compran más de ocho cuadernos?

$$\text{a) } P(x) = \begin{cases} 2,25x & \text{si } x < 8 \\ \sqrt{5x^2 + 3} & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$$

$$x = 5 \Rightarrow P(5) = 2,25 \cdot 5 = 11,25 \text{ €}$$

$$x = 10 \Rightarrow P(10) = \sqrt{5 \cdot 100 + 3} = 22,42 \text{ €}$$

$$x = 15 \Rightarrow P(15) = \sqrt{1125 + 3} = 33,59 \text{ €}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 8^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} 2,25x = 18 \qquad \lim_{x \rightarrow 8^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \sqrt{5x^2 + 3} = 17,97$$

No es continua.

- Si se compran 5 unidades, cada cuaderno sale a 2,25 €.  
Si se compran 10 unidades, cada cuaderno sale a 2,24 €.  
Si se compran 15 unidades, cada cuaderno sale a 2,24 €.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{5x^2 + 3}{x^2}}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5 + \frac{3}{x^2}}}{1} = \sqrt{5} = 2,24 \text{ €}$$

- Obviamente, el precio de cada cuaderno es muy cercano a 2,25 €, independientemente de las unidades que se compran. No existe tal oferta.

11.66 Población de bivalvos

Ante la peligrosa proliferación de una especie de bivalvos en las aguas fluviales de una región, las autoridades sanitarias han tomado ciertas medidas que pretenden conseguir que la población de estos animales se adapte a la siguiente relación:

$$p(x) = \frac{ax + 1250}{3x + b}$$

Donde  $x$  es el tiempo transcurrido en meses desde que se toman las citadas medidas, y  $p(x)$ , el número de ejemplares de esa especie por cada metro cuadrado de superficie de río.

Los parámetros  $a$  y  $b$  serán determinados por los expertos teniendo en cuenta que:

- El número inicial de bivalvos por metro cuadrado es aproximadamente 250.
- Se desea que, con el paso del tiempo, la población se estabilice en unos 100 ejemplares por metro cuadrado.

Calcula el valor de dichos parámetros.

$$p(0) = \frac{a \cdot 0 + 1250}{3 \cdot 0 + b} = \frac{1250}{b} = 250 \Rightarrow b = \frac{1250}{250} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1250}{3x + 5} = \frac{a}{3} = 100 \Rightarrow a = 300$$

AUTOEVALUACIÓN

11.A1 Calcula los siguientes límites en el infinito:

- |   |  |   |  |
|---|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6 - x + x^3)$                         | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x + 5}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 - 9x^2 + 4)$                | g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{1}{x} \right)^x$           |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2 + 4x^3}{6x^2 + 7x - 1}$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4}{x^2 + 7} \right)^{x^2+3}$         | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 4}{3x^4 - 9x^2}$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x + 2}{5x - 3} \right)^{x+1}$ |
- 
- |  |   |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6 - x + x^3) = -\infty$  | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 - 9x^2 + 4) = -\infty$  |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2 + 4x^3}{6x^2 + 7x - 1} = +\infty$  | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 4}{3x^4 - 9x^2} = \frac{5}{3}$   |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x + 5}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}} = 1$   | g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{1}{x} \right)^x = +\infty$  |
| d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4}{x^2 + 7} \right)^{x^2+3} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x^2+3)}{x^2+7}} = e^4$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x + 2}{5x - 3} \right)^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5(x+1)}{5x-3}} = e$ |

11.A2 Halla los límites que se indican:

- |   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow -4} \left( 3 + x^2 - \frac{x^3}{8} \right)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$  | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2}$    | g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 15}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 9)^{-x}$                           | d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$ | f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 5x + 1}{x^3 + 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5}$ |
- 
- |   |  |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -4} \left( 3 + x^2 - \frac{x^3}{8} \right) = 27$                        | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 3} = +\infty \end{cases}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 9)^{-x} = 1$   | f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 5x + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(4x + 1)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 1}{x^2 - x + 1} = -1$  |
| c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x^2 + 1) = 4$ | g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 1}{x + 5} = -2$   |
| d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x(x + 2) = 8$        | h) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{7}{4}$  |

11.A3 Estudia si las siguientes funciones son o no continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \neq -3 \\ 10 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 & \text{si } x \leq 6 \\ 2 - x & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ -3 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 4x - 2x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) 1)  $f(-3) = 10$

2)  $\lim_{x \rightarrow -3} (2x - x^2) = -15$

3)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3)$ . La función es discontinua en  $x = -3$ .

b) Es una función continua en  $\mathbf{R} - \{6\}$ . Veamos qué sucede en  $x = 6$ .

1)  $f(6) = 1$

2)  $\lim_{x \rightarrow 6^-} \left(\frac{x}{3} - 1\right) = 1$                        $\lim_{x \rightarrow 6^+} (2 - x) = -4$ . La función es discontinua en  $x = 6$ .

c) Es una función que no está definida en  $x = 3$ . Por tanto, es continua al menos en  $\mathbf{R} - \{-2, 3\}$ .

1)  $f(-2) = -3$

2)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$ . La función es discontinua en  $x = -2$ .

11.A4 ¿Qué tipo de discontinuidad presentan estas funciones?

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$  en  $x_0 = -3$     b)  $f(x) = \frac{4x + 3}{x - 6}$  en  $x_0 = 6$     c)  $f(x) = \begin{cases} 2 + 3x - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - 5x & \text{si } x > 1 \end{cases}$  en  $x_0 = 1$

a) No está definida en  $-3$  y  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = 0$ . En este punto es discontinua evitable.

b) La función no está definida en 6.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{4x + 3}{x - 6} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4x + 3}{x - 6} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{4x + 3}{x - 6} = +\infty \end{cases}$$

En este punto es discontinua de 2.ª especie.

c) 1)  $f(1) = 4$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2 + 3x - x^2) = 4$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - 5x) = -4$ . En este punto es discontinua de salto finito.

## MATETIEMPOS

## El aterrizaje de un avión

Construye un gráfico que represente la altura de un avión desde que empieza la operación de aterrizaje hasta que se posa en la pista. ¿A qué valor tiende la función que representa este gráfico?



Este es el concepto de límite, el avión se acercará cada vez más a la pista, se posará en ella, pero no formará parte de ella. El valor al que tiende es cero.