2 SUCCESSIONS

Pàgina 51

REFLEXIONA I RESOL

Quantes parelles de conills?

Quantes parelles de conills es produiran en un any, començant amb una parella única, si cada mes qualsevol parella engendra una altra parella, que es reproduïx al seu torn des del segon mes?

Razonando del modo que se propone, llegamos a que el número de parejas, mes a mes, es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Así, el número total de parejas al final del año es de 144 (la que había al principio y otras 143 nuevas).

La successió de Fibonacci i el número Φ

Si dividim cada dos termes consecutius de la successió de Fibonacci, obtenim:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{13} & \mathbf{21} \\ & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} & \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}} & \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{13}} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1{,}5} & \mathbf{1{,}66} & \mathbf{1{,}6} & \mathbf{1{,}625} & \mathbf{1{,}615} \end{array}$$

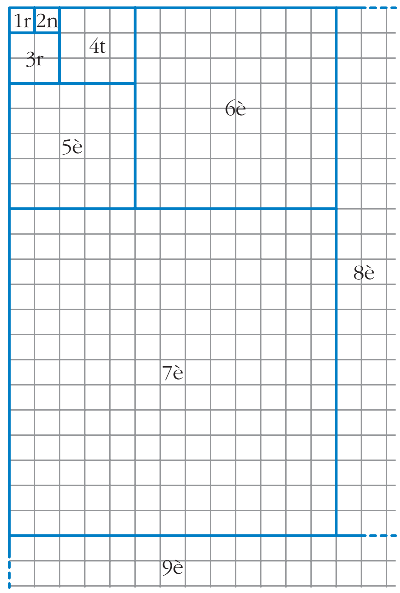
Comprova, calculant quocients nous, que el número a què s'aproximen és el número auri.

$$\frac{55}{34} = 1{,}61764\ldots; \quad \frac{89}{55} = 1{,}61818\ldots; \quad \frac{144}{89} = 1{,}61797\ldots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$

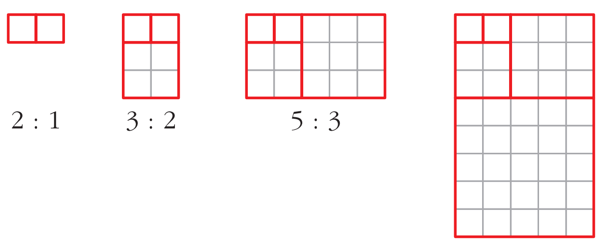
Una representació gràfica

Observa aquesta composició feta amb quadrats:



El costat dels quadrats primer i segon és 1. A partir del tercer, el costat de cada un dels quadrats següents que es van formant és igual a la suma dels costats dels dos que el precedixen. Quin és el costat del 8é? I el del 9é?

Observa també els rectangles que es formen successivament:



Els quocients entre les seues dimensions formen la successió que hem estudiat en l'apartat anterior. S'aproximen, per tant, al número Φ. Açò vol dir que aquests rectangles s'assemblen, cada vegada més, a rectangles auris.

Comprova-ho per als quatre rectangles següents:

13 : 8 21 : 13 34 : 21 55 : 34

El lado del 8.º cuadrado es 21 y el lado del 9.º cuadrado es 34.

$$\frac{13}{8} = 1{,}625; \ \frac{21}{13} = 1{,}615; \ \frac{34}{21} = 1{,}619\ldots; \ \frac{55}{34} = 1{,}617\ldots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$

Pàgina 52

1. Digues el criteri pel qual es formen les successions següents i afig dos termes a cada una:

a) 3, 8, 13, 18, 23, …

b) 1, 8, 27, 64, 125, …

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, …

d) 8; 4; 2; 1; 0,5; …

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, …

h) 20, 13, 6, –1, –8, …

a) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole 5 al anterior: $a_6 = 28$, $a_7 = 33$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa: $b_6 = 216$, $b_7 = 343$.

c) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por 10 el anterior:

$c_6 = 100\,000$, $c_7 = 1\,000\,000$.

d) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ (dividiendo entre 2) el anterior: $d_6 = 0{,}25$, $d_7 = 0{,}125$.

e) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores: $e_7 = 29$, $e_8 = 47$.

f) Cada término, a partir del tercero, se obtiene restando los dos anteriores: $f_7 = 16$, $f_8 = -25$.

g) Cada término es el número del lugar que ocupa, con signo positivo si es impar, y negativo si es par: $g_7 = 7$, $g_8 = -8$.

h) Cada término, a partir del segundo, se obtiene restándole 7 al anterior: $h_6 = -15$, $h_7 = -22$.

Pàgina 53

2. Forma una successió recurrent, a_n, amb aquestes dades:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

3. Escriu els quatre primers termes de les successions que tenen com a terme general:

$a_n = 3 + 5(n-1)$ $\qquad b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\qquad c_n = (-1)^n\, 2^n$

$d_n = (n-1)(n-2)$ $\qquad e_n = n^2 + (-1)^n\, n^2$

$a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 13$, $a_4 = 18$ $\qquad b_1 = 3$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_4 = \frac{3}{8}$

$c_1 = -2$, $c_2 = 4$, $c_3 = -8$, $c_4 = 16$ $\qquad d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 2$, $d_4 = 6$

$e_1 = 0$, $e_2 = 8$, $e_3 = 0$, $e_4 = 32$

4. Construïx una successió la llei de recurrència de la qual siga $a_n = a_{n-1} + n$.

Si tomamos, por ejemplo, $a_1 = 1$, entonces quedaría: $a_2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = 3 + 3 = 6$, $a_4 = 6 + 4 = 10$, $a_5 = 10 + 5 = 15$, $a_6 = 15 + 6 = 21$, $a_7 = 21 + 7 = 28$, …

5. Dóna el terme general de les successions següents que no siguen recurrents:

a) 3, 8, 13, 18, 23, … **b) 1, 8, 27, 64, 125, …**

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, … **d) 8, 4, 2, 1, …**

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, … **f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …**

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, … **h) 20, 13, 6, –1, –8, …**

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5$ b) $b_n = n^3$

c) $c_n = 10^{n-1}$ d) $d_n = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) Es recurrente f) Es recurrente

g) $g_n = (-1)^{n-1} \cdot n$ h) $h_n = 20 - 7 \cdot (n - 1)$

Pàgina 54

1. Quines de les successions següents són *progressions aritmètiques*? En cada una digues-ne la diferència i afig-hi dos termes més:

a) 3, 7, 11, 15, 19, … **b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …**

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … **d) 10, 7, 4, 1, –2, …**

e) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; 11; … **f) –18; –3,1; 11,8; 26,7; 41,6; …**

a) Es una progresión aritmética con $d = 4$; $a_6 = 23$, $a_7 = 27$.

b) No es una progresión aritmética.

c) No es una progresión aritmética.

d) Es una progresión aritmética con $d = -3$; $d_6 = -5$, $d_7 = -8$.

e) Es una progresión aritmética con $d = 1{,}6$; $e_6 = 9{,}4$; $e_7 = 7{,}8$.

f) Es una progresión aritmética con $d = 14{,}9$; $f_6 = 56{,}5$; $f_7 = 71{,}4$.

2. En la successió 1a), troba el terme a_{20} i la suma dels 20 primers termes.

$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot 4 = 3 + 76 = 79$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$

3. **En la successió 1d), troba el terme d_{40} i la suma dels 40 primers termes.**

$d_{40} = d_1 + 39 \cdot (-3) = 10 - 117 = -107$

$S_{40} = \dfrac{(d_1 + d_{40}) \cdot 40}{2} = \dfrac{(10 - 107) \cdot 40}{2} = -1\,940$

4. **En la successió 1e), troba el terme e_{100} i la suma dels 100 primers termes.**

$e_{100} = e_1 + 99 \cdot (-1{,}6) = 17{,}4 - 158{,}4 = -141$

$S_{100} = \dfrac{(e_1 + e_{100}) \cdot 100}{2} = \dfrac{(17{,}4 - 141) \cdot 100}{2} = -6\,180$

5. **En la successió 1f), troba els termes f_8, f_{17} i la suma $f_8 + f_9 + \ldots + f_{16} + f_{17}$.**

$f_8 = f_1 + 7 \cdot 14{,}9 = -18 + 104{,}3 = 86{,}3$

$f_{17} = f_1 + 16 \cdot 14{,}9 = -18 + 238{,}4 = 220{,}4$

En la suma pedida hay 10 sumandos.

$S = \dfrac{(f_1 + f_{17}) \cdot 10}{2} = \dfrac{(86{,}3 + 220{,}4) \cdot 10}{2} = 1\,533{,}5$

Pàgina 55

6. **Quines de les successions següents són *progressions geomètriques*? En cada una digues-ne la raó i afig-hi dos termes més:**

a) 1, 3, 9, 27, 81, …

b) 100; 50; 25; 12,5; …

c) 12, 12, 12, 12, 12, …

d) 5, –5, 5, –5, 5, –5, …

e) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …

a) Es una progresión geométrica con $r = 3$; $a_6 = 243$, $a_7 = 729$.

b) Es una progresión geométrica con $r = \dfrac{1}{2}$; $b_5 = 6{,}25$, $b_6 = 3{,}125$.

c) Es una progresión geométrica con $r = 1$; $c_6 = 12$, $c_7 = 12$.

d) Es una progresión geométrica con $r = -1$; $d_7 = 5$, $d_8 = -5$.

e) Es una progresión geométrica con $r = -\dfrac{1}{3}$; $e_6 = -\dfrac{10}{27}$, $e_7 = \dfrac{10}{81}$.

7. **Calcula la suma dels 10 primers termes de cada una de les progressions geomètriques de l'exercici anterior.**

a) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1 \cdot 3^9 = 19\,683$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29\,524$

b) $b_{10} = b_1 \cdot r^9 = 100 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{100}{512} = \dfrac{25}{128}$

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot r - b_1}{r - 1} = \frac{\dfrac{25}{128} \cdot \dfrac{1}{2} - 100}{\dfrac{1}{2} - 1} \approx 199{,}805$$

c) $c_{10} = 12;\ \ S_{10} = 12 \cdot 10 = 120$

d) $d_{10} = -5;\ \ S_{10} = 0$

e) $e_{10} = e_1 \cdot r^9 = 90 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^9 = \dfrac{-90}{19\,683} = \dfrac{-10}{2\,187}$

$$S_{10} = \frac{e_{10} \cdot r - e_1}{r - 1} = \frac{\dfrac{10}{6\,561} - 90}{-\dfrac{1}{3} - 1} \approx 67{,}499$$

8. **En quines de les progressions geomètriques de l'exercici anterior pots calcular la suma dels seus infinits termes? Troba-la.**

Podemos calcular la suma de sus infinitos términos en las progresiones geométricas con $|r| < 1$:

b) $S_\infty = \dfrac{b_1}{1 - r} = \dfrac{100}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{100}{\dfrac{1}{2}} = 200$

e) $S_\infty = \dfrac{e_1}{1 - r} = \dfrac{90}{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{90}{\dfrac{4}{3}} = 67{,}5$

Pàgina 56

9. **Calcula: $1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$**

$$\frac{30 \cdot (30 + 1) \cdot (60 + 1)}{6} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9\,455$$

10. **Calcula: $50^2 + 51^2 + \ldots + 60^2$**

$$(1^2 + \ldots + 60^2) - (1^2 + \ldots + 49^2) = \frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} =$$

$$= 73\,810 - 40\,425 = 33\,385$$

11. **Calcula: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3$**

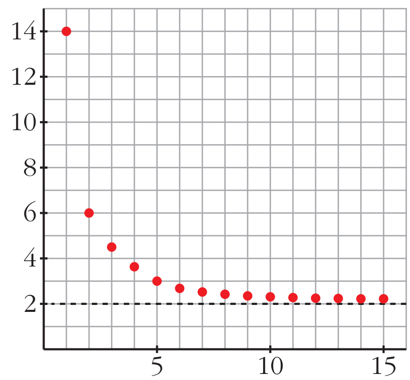
$$\frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 14\,400$$

12. **Calcula: $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3$**

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3 = (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \ldots + (2 \cdot 10)^3 =$$
$$= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \ldots + 2^3 \cdot 10^3 =$$
$$= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3) =$$
$$= 8 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 8 \cdot 3\,025 = 24\,200$$

Pàgina 57

1. **Representa la successió $a_n = \dfrac{4n + 10}{2n - 1}$ i assigna'n un valor al límit.**



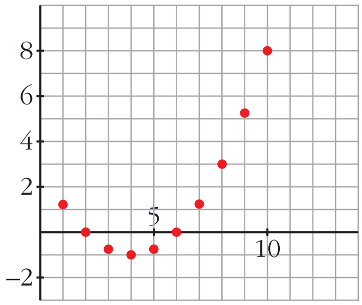
$a_1 = 14,\ a_2 = 6,\ a_3 = 4{,}4;\ a_4 \approx 3{,}71;$

$a_5 \approx 3{,}33,\ \ldots,\ a_{10} \approx 2{,}63, \ldots;$

$a_{100} \approx 2{,}06;\ \ldots;\ a_{1\,000} \approx 2{,}006, \ldots$

$\text{lím } a_n = 2$

2. **Representa la successió $b_n = \dfrac{n^2}{4} - 2n + 3$ i assigna'n un valor al límit.**



$b_1 = 1{,}25;\ \ b_2 = 0;\ b_3 = -0{,}75;$

$b_4 = -1;\ b_5 = -0{,}75;\ \ b_6 = 0;$

$b_7 = 1{,}25;\ b_8 = 3;\ b_9 = 5{,}25;\ b_{10} = 8, \ldots,$

$b_{100} = 2\,303, \ldots$

$\text{lím } b_n = +\infty$

Pàgina 59

3. **Estudia el comportament d'aquestes successions per a termes molt avançats i indica'n el límit:**

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$

c) $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2{,}83$; $a_{100} \approx 32{,}83$; $a_{1\,000} \approx 332{,}83, \dots$ *lím* $a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1{,}133$; $b_{100} \approx 1{,}876$; $b_{1\,000} \approx 1{,}987, \dots$ *lím* $b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \approx -1{,}27 \cdot 10^3, \dots$ *lím* $c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999, \dots$ *lím* $d_n = 5$

4. **Digues, raonadament, quines de les successions següents tenen límit:**

a) $a_n = -\dfrac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$

c) $c_n = (-1)^n\, n$ **d)** $d_n = (-1)^n \dfrac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002, \dots$ *lím* $a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0{,}714$; $b_{11} \approx -0{,}733$; $b_{100} \approx 0{,}962$; $b_{101} \approx -0{,}962, \dots$

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a –1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -3, \dots$ $c_{1\,000} = 1\,000$, $c_{1\,001} = -1\,001, \dots$

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. La sucesión no tiene límite.

d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5; \dots;$ $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196, \dots$ *lím* $d_n = 0$.

Pàgina 61

1. **Obtín els huit primers valors de a_n (termes de la successió) i de S_n (sumes parcials) en cada una de les progressions següents. Calcula en cada una el *lím* S_n:**

a) 125, 50, 20, … **b)** 125, –50, 20, … **c)** 17, –17, 17, …

d) 17, 17, 17, … **e)** 10; 12; 14,4; … **f)** 10; –12; 14,4; …

a) $a_1 = 125$, $a_2 = 50$, $a_3 = 20$, $a_4 = 8$, $a_5 = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$; $a_6 = \dfrac{32}{25} = 1{,}28$; $a_7 = \dfrac{64}{125} = 0{,}512$;

$a_8 = \dfrac{128}{625} = 0{,}2048$.

$S_1 = 125$; $S_2 = 175$; $S_3 = 195$; $S_4 = 203$; $S_5 = 206{,}2$; $S_6 = 207{,}48$; $S_7 = 207{,}992$; $S_8 = 208{,}1968$.

Como $r = \frac{2}{5} = 0{,}4 < 1$; $lím\ S_n = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{125}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{625}{3} = 208{,}\widehat{3}$

b) $b_1 = 125$; $b_2 = -50$; $b_3 = 20$; $b_4 = -8$; $b_5 = 3{,}2$; $b_6 = -1{,}28$; $b_7 = 0{,}512$; $b_8 = -0{,}2048$.

$S_1 = 125$; $S_2 = 75$; $S_3 = 95$; $S_4 = 87$; $S_5 = 90{,}2$; $S_6 = 88{,}92$; $S_7 = 89{,}432$; $S_8 = 89{,}2272$.

Como $r = -\frac{2}{5} = -0{,}4 < 1$; $lím\ S_n = \frac{b_1}{1 - r} = \frac{125}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{625}{7} \approx 89{,}286$

c) $c_1 = 17$; $c_2 = -17$; $c_3 = 17$; $c_4 = -17$; $c_5 = 17$; $c_6 = -17$; $c_7 = 17$; $c_8 = -17$.

$S_1 = 17$; $S_2 = 0$; $S_3 = 17$; $S_4 = 0$; $S_5 = 17$; $S_6 = 0$; $S_7 = 17$; $S_8 = 0$.

S_n no tiene límite.

d) $d_1 = 17$; $d_2 = 17$; $d_3 = 17$; $d_4 = 17$; $d_5 = 17$; $d_6 = 17$; $d_7 = 17$; $d_8 = 17$.

$S_1 = 17$; $S_2 = 34$; $S_3 = 51$; $S_4 = 68$; $S_5 = 85$; $S_6 = 102$; $S_7 = 119$; $S_8 = 136$.

$lím\ S_n = +\infty$.

e) $e_1 = 10$; $e_2 = 12$; $e_3 = 14{,}4$; $e_4 = 17{,}28$; $e_5 = 20{,}736$; $e_6 = 24{,}8832$; $e_7 = 29{,}85984$; $e_8 = 35{,}831808$.

$S_1 = 10$; $S_2 = 22$; $S_3 = 36{,}4$; $S_4 = 53{,}68$; $S_5 = 74{,}416$; $S_6 = 99{,}2992$; $S_7 = 129{,}15904$; $S_8 = 164{,}99084$.

Como $r = 1{,}2 > 1$; $lím\ S_n = +\infty$.

f) $f_1 = 10$; $f_2 = -12$; $f_3 = 14{,}4$; $f_4 = -17{,}28$; $f_5 = 20{,}736$; $f_6 = -24{,}8832$; $f_7 = 29{,}85984$; $f_8 = -35{,}831808$.

$S_1 = 10$; $S_2 = -2$; $S_3 = 12{,}4$; $S_4 = -4{,}88$; $S_5 = 15{,}856$; $S_6 = -9{,}0272$; $S_7 = 20{,}83264$; $S_8 = -14{,}999168$.

S_n no tiene límite.

Pàgina 64

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER A PRACTICAR

Criteri per a formar successions

1 **Descriu el criteri amb què es formen aquestes successions i afig tres termes a cada una:**

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots$

c) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$

d) $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

e) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

a) Cada término lo obtenemos dividiendo 1 entre el lugar que ocupa el término:

$$a_6 = \frac{1}{6},\ a_7 = \frac{1}{7},\ a_8 = \frac{1}{8}$$

b) Cada término es la raíz cuadrada del lugar que ocupa: $a_6 = \sqrt{6}, a_7 = \sqrt{7}, a_8 = \sqrt{8}$

c) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa más 1 unidad: $a_6 = 37$, $a_7 = 50$, $a_8 = 65$

d) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa menos 1 unidad: $a_6 = 35$, $a_7 = 48$, $a_8 = 63$

e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior: $a_6 = 21$, $a_7 = 28$, $a_8 = 36$

2 **Escriu els cinc primers termes de les successions els termes generals de les quals són aquests:**

a) $a_n = 3 + \frac{2}{10^n}$

b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$

d) $d_n = 2^{-n}$

e) $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

f) $f_n = \frac{(-1)^n n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2;\ a_2 = 3{,}02;\ a_3 = 3{,}002;\ a_4 = 3{,}0002;\ a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0;\ b_2 = \frac{3}{2};\ b_3 = \frac{8}{3};\ b_4 = \frac{15}{4};\ b_5 = \frac{24}{5}$

c) $c_1 = 1;\ c_2 = \frac{5}{3};\ c_3 = 2;\ c_4 = \frac{11}{5};\ c_5 = \frac{7}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{2};\ d_2 = \frac{1}{4};\ d_3 = \frac{1}{8};\ d_4 = \frac{1}{16};\ d_5 = \frac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

3 **Escriu el terme general d'aquestes successions:**

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ **b)** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

c) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \dots$ **d) 5,1; 5,01; 5,001; 5,0001; …**

a) $a_n = \frac{n}{n-1}$ b) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

c) $c_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ d) $d_n = 5 + \frac{1}{10^n}$

4 **Construïx dues successions les lleis de recurrències de les quals siguen les següents:**

a) $a_1 = 0 \quad a_2 = 2 \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

b) $a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32}, \dots$ b) $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \dots$

5 **Busca una llei de recurrència per a definir les successions següents:**

a) 4, 7, 3, –4, –7, … **b)** $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

Progressions aritmètiques

6 **De les successions següents, digues quines són progressions aritmètiques i escriu-ne el terme general:**

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; … **b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …**

c) 1, 2, 4, 7, 11, … **d) 14, 13, 11, 8, 4, …**

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1,2$ y $d = 1,2$.

$a_n = 1,2 + (n-1) \cdot 1,2 = 1,2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0,4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0,4) = -0,4n + 5,4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

7 **De les successions següents, indica quines són progressions aritmètiques:**

a) $\boldsymbol{a_n = 3n}$ **b)** $\boldsymbol{b_n = 5n - 4}$

c) $\boldsymbol{c_n = \frac{1}{n}}$ **d)** $\boldsymbol{d_n = \frac{8 - 3n}{4}}$

e) $\boldsymbol{e_n = 5 + \frac{n}{2}}$ **f)** $\boldsymbol{f_n = n^2 - 1}$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{3},\ c_4 = \frac{1}{4}, \dots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8 - 3n}{4} - \frac{8 - 3(n-1)}{4} = \frac{8 - 3n - 8 + 3n - 3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 8, f_4 = 15, \dots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

8 **Calcula els termes $\boldsymbol{a_{10}}$ i $\boldsymbol{a_{100}}$ de les següents progressions aritmètiques:**

a) –4, –2, 0, 2, 4, …

b) 2, –3, –8, –13, –18, …

c) $\boldsymbol{\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots}$

a) $a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 2 = -4 + 18 = 14$

$a_{100} = a_1 + 99d = -4 + 99 \cdot 2 = -4 + 198 = 194$

b) $a_{10} = a_1 + 9d = 2 - 9 \cdot 5 = 2 - 45 = -43$

$a_{100} = a_1 + 99d = 2 - 99 \cdot 5 = 2 - 495 = -493$

c) $a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$$a_{100} = a_1 + 99d = \frac{3}{4} + 99 \cdot \frac{1}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$$

9 **Calcula la suma dels 25 primers termes de les següents progressions aritmètiques:**

a) 3, 6, 9, 12, 15, … **b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …**

c) $\boldsymbol{c_n = 4n - 2}$ **d)** $\boldsymbol{d_n = \frac{1-2n}{2}}$

a) $a_1 = 3$; $a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3+75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5$; $b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2$; $c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1\,250$$

d) $d_1 = \frac{-1}{2}$; $d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

Progressions geomètriques

10 **De les successions següents, quines són progressions geomètriques? Escriu tres termes més en cada una i també el seu terme general.**

a) 32, 16, 8, 4, 2, … **b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …**

c) 1, 4, 9, 16, 25, … **d)** $\boldsymbol{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}}$**, …**

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36$, $b_7 = 49$, $b_8 = 64$, $b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$c_6 = 0{,}00001$; $c_7 = 0{,}000001$; $c_8 = 0{,}0000001$; $c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8$; $d_7 = 8\sqrt{2}$; $d_8 = 16$; $d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

11 **Calcula la suma dels 25 primers termes de les següents progressions geomètriques i troba la suma dels infinits termes en els casos que siga possible:**

a) $a_1 = 32, \ r = \frac{1}{2}$ **b)** $a_1 = 10, \ r = \frac{1}{10}$

c) $a_1 = 2^{-10}, \ r = 2$ **d)** $a_1 = -5, \ r = -\frac{1}{4}$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1}, \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

a) $S_{25} = \dfrac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64 \qquad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{32}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{32}{\frac{1}{2}} = 64$

b) $S_{25} = \dfrac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} \approx 11{,}1 \approx \dfrac{100}{9} \qquad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{10}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9} = 11{,}1$

c) $S_{25} = \dfrac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\,768$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ es mayor que 1.

d) $S_{25} = \dfrac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4 \qquad S_\infty = \dfrac{-5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

Pàgina 65

Suma de potències

12 **a) Demostra que:**

$$\mathbf{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)}$$

b) Calcula la suma dels quadrats dels 50 primers nombres parells.

c) Calcula la suma dels quadrats de tots els nombres imparells menors que 100.

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 =$

$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) =$

$$= 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 =$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) =$

$$= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$$

13 **Troba la suma següent:**

$$\mathbf{21^3 + 22^3 + 23^3 + \dots + 37^3 + 38^3 + 39^3 + 40^3}$$

$21^3 + \dots + 40^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + 20^3 + 21^3 + \dots + 40^3) - (1^3 + \dots + 20^3) =$

$$= \frac{40^2 \cdot 41^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 672\,400 - 44\,100 = 628\,300$$

Límit d'una successió

14 **Calcula els termes a_{10}, a_{100} i $a_{1\,000}$, en cada successió i indica quin n'és el límit:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$

b) $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$

c) $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$

d) $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

$\text{lím } a_n = 0$

b) $a_{10} = 2,5$; $a_{100} = 2,05$; $a_{1\,000} = 2,005$

$\text{lím } a_n = 2$

c) $a_{10} = -0,5$; $a_{100} = -0,95$; $a_{1\,000} = -0,995$

$\text{lím } a_n = -1$

d) $a_{10} = -6,7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

$\text{lím } a_n = -\infty$

15 **Troba alguns termes molt avançats de les successions següents i indica quin n'és el límit:**

a) $a_n = 5n - 10$ **b)** $b_n = 100 - n$

c) $c_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ **d)** $d_n = \dfrac{n}{2n+1}$

a) $a_{10} = 40$; $a_{100} = 490$; $a_{1\,000} = 4\,990$

$lím\ a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 90$; $b_{100} = 0$; $b_{1\,000} = -900$

$lím\ b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 0{,}63$; $c_{100} \approx 0{,}9603$; $c_{1\,000} \approx 0{,}996$

$lím\ c_n = 1$

d) $d_{10} \approx 0{,}476$; $d_{100} \approx 0{,}498$; $d_{1\,000} \approx 0{,}4998$

$lím\ d_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

16 **Estudia el comportament de les successions següents per a termes molt avançats i indica quin és el límit de cada una:**

a) $a_n = 3n^2 - 10$ **b)** $b_n = 3n - n^2$

c) $c_n = 10 - 5n + n^2$ **d)** $d_n = (1 - 2n)^2$

e) $e_n = (4 - n)^3$ **f)** $f_n = 1 - (n + 2)^2$

a) $a_{10} = 290$; $a_{100} = 29\,990$; $a_{1\,000} = 2\,999\,990$

$lím\ a_n = +\infty$

b) $b_{10} = -70$; $b_{100} = -9\,700$; $b_{1\,000} = -997\,000$

$lím\ b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 60$; $c_{100} = 9\,510$; $c_{1\,000} = 995\,010$

$lím\ c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 361$; $d_{100} = 39\,601$; $d_{1\,000} = 3\,996\,001$

$lím\ d_n = +\infty$

e) $e_{10} = -216$; $e_{100} = -884\,736$; $e_{1\,000} = -988\,047\,936$

$lím\ e_n = -\infty$

f) $f_{10} = -143$; $f_{100} = -10\,403$; $f_{1\,000} = -1\,004\,003$

$lím\ f_n = -\infty$

17 **Estudia el comportament de les successions següents per a termes molt avançats i indica quin és el límit de cada una:**

a) $a_n = \dfrac{1}{3n}$ b) $b_n = \dfrac{5}{3n+2}$

c) $c_n = \dfrac{3}{n+1}$ d) $d_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$

e) $e_n = \dfrac{1}{n^2}$ f) $f_n = \dfrac{-100}{n^2}$

g) $g_n = (-1)^n$ h) $h_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

a) $a_{10} = 0{,}0\widehat{3}$; $a_{100} = 0{,}00\widehat{3}$; $a_{1\,000} = 0{,}000\widehat{3}$

$\lim a_n = 0$

b) $b_{10} = 0{,}15625$; $b_{100} = 0{,}01656$; $b_{1\,000} = 0{,}00167$

$\lim b_n = 0$

c) $c_{10} = 0{,}\widehat{27}$; $c_{100} = 0{,}\widehat{0297}$; $c_{1\,000} = 0{,}\widehat{002997}$

$\lim c_n = 0$

d) $d_{10} = 0{,}297$; $d_{100} = 0{,}029997$; $d_{1\,000} = 0{,}002999997$

$\lim d_n = 0$

e) $e_{10} = 0{,}01$; $e_{100} = 0{,}0001$; $e_{1\,000} = 0{,}000001$

$\lim e_n = 0$

f) $f_{10} = -1$; $f_{100} = -0{,}01$; $f_{1\,000} = -0{,}0001$

$\lim f_n = 0$

g) $g_{10} = 1$; $g_{101} = -1$; $g_{1\,000} = 1$; $g_{10\,001} = -1$

La sucesión no tiene límite.

h) $h_{10} = 0{,}0909$; $h_{100} = 0{,}0099$; $h_{1\,000} = 0{,}000999$; $h_{1\,001} = -0{,}000999$

$\lim h_n = 0$

PER A RESOLDRE

18 **Calcula el 15é terme en la progressió següent:**

3; 2,7; 2,4; 2,1; …

Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -0{,}3$.

Por tanto, $a_{15} = a_1 + 14d = 3 - 0{,}3 \cdot 14 = 3 - 4{,}2 = -1{,}2$.

19 **Troba el quart terme d'una progressió aritmètica en què $d = 3$ i $a_{20} = 100$.**

$a_{20} = a_4 + 16d \;\rightarrow\; a_4 = a_{20} - 16d = 100 - 16 \cdot 3 = 52$

20 **Calcula la suma de tots els nombres imparells de tres xifres.**

Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

21 **Quant val la suma dels 100 primers múltiples de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35\,350$$

22 **En una progressió aritmètica sabem que $d = 3$, $a_n = 34$ i $S_n = 133$. Calcula n i a_1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\rightarrow\; 34 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \\ S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot n}{2} \end{array}\right\}$$

$34 = a_1 + 3n - 3 \;\rightarrow\; a_1 = 37 - 3n$

$$133 = \frac{(37 - 3n + 34) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 266 = (71 - 3n)n$$

$266 = 71n - 3n^2 \;\rightarrow\; 3n^2 - 71n + 266 = 0$

$$n = \frac{71 \pm \sqrt{5\,041 - 3\,192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1\,849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} n = 14/3 \text{ (no vale)} \\ n = 19 \end{cases}$$

$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \;\rightarrow\; a_1 = -20$

23 **Els costats d'un hexàgon estan en progressió aritmètica. Calcula'ls sabent que el major mesura 13 cm i que el perímetre val 48 cm.**

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} a_6 = a_1 + 5d \;\rightarrow\; 13 = a_1 + 5d \;\rightarrow\; a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \;\rightarrow\; 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \;\rightarrow\; 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{array}\right.$$

$$48 = 78 - 15d \;\rightarrow\; 15d = 30 \;\rightarrow\; d = \frac{30}{15} = 2 \;\rightarrow\; d = 2$$

$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \;\rightarrow\; a_1 = 3$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

24 **En un cine, la segona fila de butaques està a 10 m de la pantalla i la setena fila està a 16 m. En quina fila ha de seure una persona que li agrade veure la pantalla a una distància de 28 m?**

$a_7 = 16 \quad \to \quad a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \quad \to \quad d = 1{,}2$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 8{,}8 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 28 \quad \to \quad 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28$$

$$1{,}2n = 20{,}4 \quad \to \quad n = 17$$

La fila 17 está a 28 metros.

25 **Escriu els termes intermedis d'una progressió aritmètica sabent que $a_1 = -3$ i $a_{10} = 18$.**

$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9d = 18 \quad \to \quad d = \dfrac{21}{9} = \dfrac{7}{3}$

Los términos son: $a_1 = -3$, $a_2 = -\dfrac{2}{3}$, $a_3 = \dfrac{5}{3}$, $a_4 = 4$, $a_5 = \dfrac{19}{3}$, $a_6 = \dfrac{26}{3}$, $a_7 = 11$, $a_8 = \dfrac{40}{3}$, $a_9 = \dfrac{47}{3}$, $a_{10} = 18$.

26 **Troba els dos termes centrals d'una progressió aritmètica de 8 termes sabent que $S_8 = 100$ i que $a_1 + 2a_8 = 48$.**

Tenemos que calcular a_4 y a_5. Sabemos que:

$$\begin{cases} S_8 = \dfrac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = (a_1 + a_8) \cdot 4 = 100 \quad \to \quad a_1 + a_8 = 25 \\ a_1 + 2a_8 = 48 \end{cases}$$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$$a_8 = 23 \quad \to \quad a_1 = 25 - a_8 = 25 - 23 = 2 \quad \to \quad a_1 = 2$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7d = 23 \quad \to \quad d = 3$$

Por tanto:

$$\left.\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11 \\ a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14 \end{cases}\right\} \quad \begin{matrix} a_4 = 11 \\ a_5 = 14 \end{matrix}$$

27 **En una progressió geomètrica, $a_1 = 8$ i $a_3 = 0{,}5$. Calcula a_5 i l'expressió de a_n.**

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8r^2 = 0{,}5 \quad \to \quad r^2 = 0{,}0625 \quad \to \quad r = \pm\, 0{,}25 = \pm\, \dfrac{1}{4}$

1.^{er} caso: $r = 0,25 = \frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2^3}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{2n-5}}$$

2.° caso: $r = -0,25 = -\frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

$$a_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

28 En una progressió geomètrica de raó $r = 3$ coneixem $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 i a_4.

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} =$$

$$= 364a_1 = 1\,456 \;\rightarrow\; a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

29 La maquinària d'una fàbrica perd cada any un 20% del valor. Si va costar 4 milions d'euros, en quant es valorarà després de 10 anys de funcionament?

– Al cabo de 1 año valdrá $\rightarrow$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\rightarrow$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\rightarrow$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^{10} \approx 429\,496{,}73$ €

30 L'1 de gener depositem 5 000 € en un compte bancari a un interés anual del 6% amb pagament mensual d'interessos. Quin serà el valor dels nostres diners un any després?

☛ ***Un 6% anual correspon a $\frac{6}{12}$ = 0,5% mensual. Cada mes els diners es multipliquen per 1,005.***

– Al cabo de 1 mes tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1{,}005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1{,}005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 5\,308{,}39$ €

Pàgina 66

31 **La suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica és igual a 4 i $a_2 = 1$. Calcula a_1 i la raó.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \dfrac{1}{r} \\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{1/r}{1-r} = \dfrac{1}{r-r^2} = 4 \quad \rightarrow \quad 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2$$

32 **Comprova, donant a n valors grans, que les successions següents tendixen a un número i digues quin és aquest número:**

a) $a_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$ **b)** $b_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+1}$

c) $c_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$ **d)** $d_n = \dfrac{2n^2-5}{n^3}$

a) $a_{10} = 2{,}238$; $a_{100} = 2{,}473$; $a_{1\,000} = 2{,}497$

$\text{lím } a_n = 2{,}5 = \dfrac{5}{2}$

b) $b_{10} = -1{,}970$; $b_{100} = -1{,}9997$; $b_{1\,000} = -1{,}999997$

$\text{lím } b_n = -2$

c) $c_{10} = 1{,}000977$; $c_{20} = 1{,}000000954$

$\text{lím } c_n = 1$

d) $d_{10} = 0{,}195$; $d_{100} = 0{,}019995$; $d_{1\,000} = 0{,}001999995$

$\text{lím } d_n = 0$

33 **Calcula el límit de les successions següents:**

a) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{n^2+3}$ **b)** $b_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

c) $c_n = \dfrac{3n+1}{\sqrt{n}}$ **d)** $d_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+2}}$

e) $e_n = \dfrac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$ **f)** $f_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{10} = 0{,}7864$; $a_{100} = 0{,}9798$; $a_{1\,000} = 0{,}9980$

$\text{lím } a_n = 1$

b) $b_{10} = 0{,}5025$; $b_{100} = 0{,}500025$; $b_{1\,000} = 0{,}50000025$

$\text{lím } b_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

c) $c_{10} = 9{,}80$; $c_{100} = 30{,}1$; $c_{1\,000} = 94{,}90$

$\text{lím } c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 1{,}756$; $d_{100} = 1{,}973$; $d_{1\,000} = 1{,}997$

$\text{lím } d_n = 2$

e) $e_{10} = 20{,}797$; $e_{100} = 107{,}278$; $e_{1\,000} = 1\,007{,}027$

$\text{lím } e_n = +\infty$

f) $f_{10} = 0{,}760$; $f_{100} = 0{,}909$; $f_{1\,000} = 0{,}969$

$\text{lím } f_n = 1$

34 **Comprova les successions següents si tenen límit:**

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{n}$

b) $b_n = 1 + (-1)^n$

c) $c_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

d) $d_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

a) $a_{100} = 2{,}01$; $a_{101} = -2{,}0099$; $a_{1\,000} = 2{,}001$; $a_{1\,001} = -2{,}000999$

Los términos pares tienden a 2 y los impares a –2.

a_n no tiene límite.

b) $b_1 = 0$; $b_2 = 2$; $b_3 = 0$; $b_4 = 2$, …

Los términos impares son 0 y los pares son 2.

b_n no tiene límite.

c) $c_1 = 0$; $c_2 = 1$; $c_3 = 0$; $c_4 = 0{,}5$; …; $c_{100} = 0{,}02$

Los términos impares son cero y los pares tienden a cero.

$\text{lím } c_n = 0$.

d) $d_1 = 0$; $d_2 = 1{,}5$; $d_3 = 0{,}67$; $d_4 = 1{,}25$; …; $d_{100} = 1{,}01$; $d_{101} = 0{,}99$

$\text{lím } d_n = 1$.

35 **Donades les successions $a_n = n^2$ i $b_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, estudia el límit de:**

a) $a_n + b_n$ **b) $a_n \cdot b_n$** **c) $\dfrac{a_n}{b_n}$**

a) $A_n = a_n + b_n = n^2 + \dfrac{1}{n^2+1}$

$A_{10} = 100{,}0099$; $A_{100} = 10\,000{,}0001$

$\textit{lím}\ (a_n + b_n) = +\infty$

b) $B_n = a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

$B_{10} = 0{,}9901$; $B_{100} = 0{,}9999$

$\textit{lím}\ (a_n \cdot b_n) = 1$

c) $C_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{1(n^2+1)} = n^2(n^2+1) = n^4 + n^2$

$C_{10} = 10\,100$; $C_{100} = 100\,010\,000$

$\textit{lím}\ \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$

36 **Durant 5 anys depositem en un banc 2 000 € al 4% amb pagament anual d'interessos.**

a) En quant es convertix cada depòsit al final del cinqué any?

b) Quina quantitat de diners hem acumulat durant aquests 5 anys?

a) Al final del 5º año:

– Los primeros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^5$ € ≈ 2 433,31 €

– Los segundos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^4$ € ≈ 2 339,72 €

– Los terceros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^3$ € ≈ 2 249,73 €

– Los cuartos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^2$ € = 2 163,2 €

– Los quintos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04$ € = 2 080 €

b) Sumamos las cantidades anteriores:

$$2\,000 \cdot 1{,}04^5 + 2\,000 \cdot 1{,}04^4 + 2\,000 \cdot 1{,}04^3 + 2\,000 \cdot 1{,}04^2 + 2\,000 \cdot 1{,}04 =$$

$$= 2\,000(1{,}04^5 + 1{,}04^4 + 1{,}04^3 + 1{,}04^2 + 1{,}04) \overset{(*)}{=}$$

$$= 2\,000 \cdot \frac{1{,}04^6 - 1{,}04}{1{,}04 - 1} = 11\,265{,}95 \text{ €}$$

(*) Suma de una progresión geométrica con $a_1 = 1{,}04$ y $r = 1{,}04$.

37 **Rebem un préstec de 2 000 € al 10% d'interés anual i hem de tornar-lo en 4 anys, pagant cada any els interessos de la part deguda més la quarta part del capital prestat.**

Calcula el que hem de pagar cada any.

$a_1 = 500 + 2\,000 \cdot 0{,}1 = 700$ €

$a_2 = 500 + 1500 \cdot 0{,}1 = 650$ €

$a_3 = 500 + 1\,000 \cdot 0{,}1 = 600$ €

$a_4 = 500 + 500 \cdot 0{,}1 = 550$ €

38 **Troba el terme general de la successió: 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, … i estudia'n el límit.**

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$

$a_1 = 2$; $a_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$; $a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$; $a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$; …; $a_{10} \approx 1{,}0718$

$a_{100} \approx 1{,}00696$; $lím\ a_n = 1$

39 **Donades les successions $a_n = n + 3$ i $b_n = 2 - n$, calcula els límits següents:**

a) $lím\ (a_n + b_n)$

b) $lím\ (a_n - b_n)$

c) $lím\ (a_n \cdot b_n)$

d) $lím\ \dfrac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n + 3 + 2 - n = 5$

$lím\ (a_n + b_n) = 5$

b) $B_n = a_n - b_n = n + 3 - (2 - n) = n + 3 - 2 + n = 2n + 1$

$B_{10} = 21$; $B_{100} = 201$; $B_{1\,000} = 2\,001$

$lím\ (a_n - b_n) = +\infty$

c) $C_n = a_n \cdot b_n = (n + 3)\,(2 - n) = 2n - n^2 + 6 - 3n = -n^2 - n + 6$

$C_{10} = -104$; $C_{100} = -10\,094$; $C_{1\,000} = -1\,000\,994$

$lím\ (a_n \cdot b_n) = -\infty$

d) $D_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n + 3}{2 - n}$

$D_{10} = -1{,}625$; $D_{100} = -1{,}051$; $D_{1\,000} = -1{,}005$

$lím\ \dfrac{a_n}{b_n} = -1$

40 **La successió $x^2 - x + 1$; $x^2 + 1$; $x^2 + x + 1$, és una progressió aritmètica? Si ho fóra, calcula'n el cinqué terme i la suma dels cinc primers termes.**

Llamamos $a_1 = x^2 - x + 1$; $a_2 = x^2 + 1$; $a_3 = x^2 + x + 1$.

Veamos si la diferencia entre cada dos términos consecutivos es la misma:

$$a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - x + 1) = x^2 + 1 - x^2 + x - 1 = x$$

$$a_3 - a_2 = x^2 + x + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + x + 1 - x^2 - 1 = x$$

Por tanto, sí es una progresión aritmética con $a_1 = x^2 - x + 1$ y diferencia $d = x$.

Así, tenemos que:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d = x^2 - x + 1 + 4x = x^2 + 3x + 1$$

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(x^2 - x + 1 + x^2 + 3x + 1) \cdot 5}{2} = \frac{(2x^2 + 2x + 2) \cdot 5}{2}$$

$$= (x^2 + x + 1) \cdot 5 = 5x^2 + 5x + 5$$

41 **Troba la suma següent:**

$$\mathbf{11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \ldots + 33^3}$$

Llmamos $S = 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \ldots + 32^3 + 33^3 = \frac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \ldots + 16^3) = 8 \cdot \frac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$$

Por tanto:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$$

$$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

42 **Siga a_n una progressió aritmètica amb $d > 0$. Quin n'és el límit?**

Si $d > 0$, la sucesión se va haciendo cada vez mayor. Por tanto, $\lim a_n = +\infty$.

43 **Si a_n és una progressió geomètrica amb $r = \frac{1}{3}$, quin n'és el límit?**

Al ir multiplicando por $\frac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero. Es decir, $\lim a_n = 0$.

44 **La successió $3, 3, 3, 3, \ldots$ pot considerar-se una progressió aritmètica i també geomètrica. Quina és la diferència en el primer cas?**

I la raó en el segon?

– Es una progresión aritmética con $d = 0$.

– También es una progresión geométrica con $r = 1$.

45 **En una progressió geomètrica qualsevol, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots,$ comprova que:**

$$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$$

Es verifica també $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$?

Enuncia una propietat que expresse els resultats anteriors.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_6 = a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 = (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{array}\right\} \text{ Son iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 \cdot a_7 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 = (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{array}\right\} \text{ Son iguales}$$

Propiedad: Si a_n es una progresión geométrica, se verifica que $a_p \cdot a_q = a_m \cdot a_n$ siempre que $p + q = m + n$.

46 **Podem considerar el número $3,\widehat{9}$ com la suma dels infinits termes de la successió:**

$$3, \frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \ldots$$

Calcula la suma i troba'n el límit. Et pareix raonable el resultat obtingut?

$$3 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \ldots = 3 + 0,9 + 0,99 + 0,999 + \ldots = 3,\widehat{9}$$

Si consideramos la progresión geométrica $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \ldots$ y sumamos todos sus términos, queda:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Por tanto: $3 + \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \ldots\right) = 3 + 1 = 4$

47 **Inventa dues successions el límit de les quals siga infinit i que, en dividir-les, la successió que resulte tendisca a 2.**

Por ejemplo: $a_n = 2n$; $b_n = n + 1$

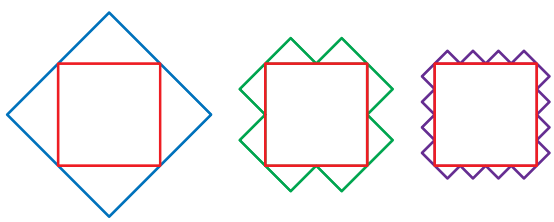
$$\text{lím } a_n = +\infty; \text{ lím } b_n = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{a_n}{b_n} = \text{lím } \frac{2n}{n+1} = 2$$

Pàgina 67

PER A APROFUNDIR-HI

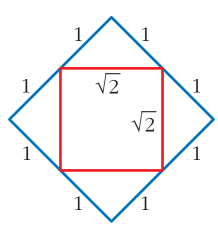
48 **Dibuixa un quadrat de costat $\sqrt{2}$ cm i sobre cada costat un triangle rectangle isòsceles; després dos, després quatre, com indiquen les figures:**



a) Forma la successió dels perímetres de les figures obtingudes. Quin n'és el límit?

b) Forma també la successió de les àrees. Quin n'és el límit?

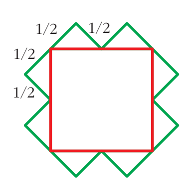
1.^er^ paso:



Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 2 = 4 cm²

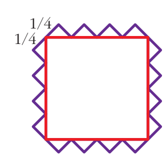
2.º paso:



Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 1 = 3 cm²

3.^er^ paso:



Perímetro = 8 cm

Área $= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ cm²

… **Paso *n*-ésimo:** $\begin{cases} \text{Perímetro} = 8 \text{ cm} \\ \text{Área} = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ cm}^2 \end{cases}$

a) 8, 8, 8, 8, …; $P_n = 8$; $\text{lím } P_n = 8$

b) 4, 3, $\frac{5}{2}$, …; $A_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\text{lím } A_n = 2$

(que es el área del cuadrado de lado $\sqrt{2}$).

49 **Els termes de la successió 1, 3, 6, 10, 15 s'anomenen nombres triangulars perquè es poden representar així:**

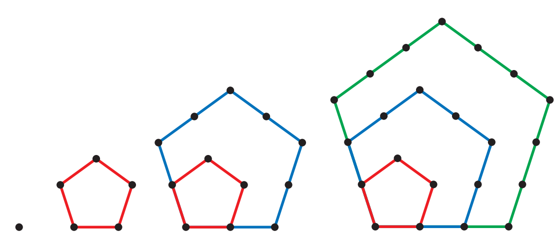
Calcula a_{10} i a_n.

$a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$; $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;

$$a_{10} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{(1 + 10) \cdot 10}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$

50 **Els termes de la successió 1, 5, 12, 22, 35 s'anomenen nombres pentagonals perquè es poden representar així:**



Calcula a_6, a_{10} i a_n.

☛ ***Aquests números es poden escriure així:***

1; 1 + 4; 1 + 4 + 7; 1 + 4 + 7 + 10; 1 + 4 + 7 + 10 + 13

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1 + 4 = 5;\ a_3 = 1 + 4 + 7 = 12;\ a_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

Observamos que vamos obteniendo las sumas de los términos de una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 3$. En el paso n-ésimo tendremos:

$$a_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + (n-1) \cdot 3) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) =$$

$$= \frac{(1 + (3n-2)) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 3n - 2) \cdot n}{2} = \frac{(3n - 1) \cdot n}{2}$$

Por tanto:

$$a_6 = \frac{17 \cdot 6}{2} = 17 \cdot 3 = 51;\ a_{10} = \frac{29 \cdot 10}{2} = 145$$

51 **Utilitza les propietats de les progressions per a simplificar l'expressió del terme general i calcular el límit de les successions següents:**

a) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

b) $b_n = 2n\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3}\right)$

a) $a_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{(1 + n) \cdot n}{2}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n + n^2}{2}\right) = \frac{n^2 + n}{2n^2}$

Hallamos el límite: $a_{10} = 0{,}55$; $a_{100} = 0{,}505$; $a_{1\,000} = 0{,}5005$; $\textit{lím}\ a_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

b) $b_n = \frac{2n}{n^3}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{2n}{n^3}\left(\frac{(1 + n) \cdot n}{2}\right) = \frac{2n}{n^3} \cdot \left(\frac{n + n^2}{2}\right) = \frac{2n^2 + 2n^3}{2n^3} =$

$= \frac{2n^3 + 2n^2}{2n^2} = \frac{2n^2(n + 1)}{2n^2} = n + 1$

$b_{10} = 11$; $b_{100} = 101$; $b_{1\,000} = 1\,001$; $\textit{lím}\ b_n = +\infty$

AUTOAVALUACIÓ

1. **Troba el terme a_{47} de la successió el terme general de la qual és:**

$$a_n = \frac{n^2 - 709}{n + 3}$$

$a_{47} = \frac{47^2 - 709}{47 + 3} = \frac{2\,209 - 709}{50} = 30$

2. **Troba el terme huité de la successió definida així:**

$$a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$$

$a_8 = 2a_6 - a_7$

$a_1 = 4$	$a_2 = 7$
$a_3 = 2a_1 - a_2 = 1$	$a_4 = 2a_2 - a_3 = 13$
$a_5 = 2a_3 - a_4 = -11$	$a_6 = 2a_4 - a_5 = 37$
$a_7 = 2a_5 - a_6 = -59$	$a_8 = 2a_6 - a_7 = 133$

3. **Troba el terme general de les successions:**

a) **3, 7, 11, 15, 19, 23, …**

b) **1, 2, 5, 10, 17, 26, …**

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$ y primer término $a_1 = 3$.

$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) El término general de la sucesión 0, 1, 4, 9, 16, 25, … es $a_n = (n-1)^2$.

Por tanto, 1, 2, 5, 10, 17, 26, … tiene por término general $a_n = (n-1)^2 + 1 =$
$= n^2 - 2n + 2$.

4. **Troba la llei de recurrència per la qual es formen les successions següents:**

a) **7, 8, 15, 23, 38, 61, …**

b) **1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …**

c) **0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, …**

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 8 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

5. **Troba les sumes següents:**

a) $\mathbf{3 + 7 + 11 + \ldots + 43}$

b) $\mathbf{1\,000 + 1\,000 \cdot 1{,}1 + 1\,000 \cdot 1{,}1^2 + \ldots + 1\,000 \cdot 1{,}1^{15}}$

c) $\mathbf{80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \ldots}$

d) $\mathbf{101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2}$

e) $\mathbf{3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3}$

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$a_n = 4n - 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_{11} = 43$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1\,000$ y razón $r = 1{,}1$.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \to S_{15} = \frac{1\,000 \cdot 1{,}1^{15} - 1\,000}{1{,}1 - 1} = 31\,772{,}48$$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{80}{1-1/2} = 160$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$$

$$= \frac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \frac{5\,546\,940 - 2\,030\,100}{6} = 586\,140$$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \mathrm{n}^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \frac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14\,391$$

6. En una progressió aritmètica coneixem $a_{15} = 43$ i $a_{86} = 85,6$.

a) Calcula $a_1 + a_{100}$.

b) Obtín el valor de a_{220}.

$$\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} = a_1 + 85d = 85,6 \end{array}\right\} \rightarrow 85d - 14d = 42,6 \rightarrow d = 0,6$$

$a_1 = 43 - 14 \cdot 0,6 = 34,6$

a) $a_1 + a_{100} = a_{15} + a_{86} = 43 + 85,6 = 128,6$ pues $1 + 100 = 15 + 86$

(a_{15} y a_{86} "equidistan" de a_1 y a_{100}).

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34,6 + 219 \cdot 0,6 = 166$

7. Troba els límits de les successions següents:

$$a_n = \frac{5}{n} \qquad b_n = \frac{5+3n}{n+1} \qquad c_n = \frac{n^2+1}{5n}$$

a) $a_{10} = 0,5$ $\quad a_{100} = 0,05$ $\quad a_{1\,000} = 0,005 \rightarrow \text{lím}\ \dfrac{5}{n} = 0$

b) $b_{10} = 3,18$ $\quad b_{100} = 3,02$ $\quad b_{1\,000} = 3,002 \rightarrow \text{lím}\ \dfrac{5+3n}{n+1} = 3$

c) $c_{10} = 2,02$ $\quad c_{100} = 20,002$ $\quad c_{1\,000} = 200,0002 \rightarrow \text{lím}\ \dfrac{n^2+1}{5n} = +\infty$