5 FUNCIONS I FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES

Pàgina 128

1. Encara que el mètode per a resoldre les preguntes següents se sistematitza a la pàgina següent, pots resoldre-les ara:

a) Quants radiants corresponen als 360° d'una circumferència?

b) Quants graus fa 1 radiant?

c) Quants graus mesura un angle de $\frac{\pi}{2}$ radiants?

d) Quants radiants equivalen a 270°?

a) 2π

b) $\frac{360°}{2\pi} = 57°\ 17'\ 44{,}8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90°$

d) $\frac{270°}{360°} \cdot 2\pi = 3\ \frac{\pi}{2}$

Pàgina 129

2. Passa a radiants els angles següents:

a) 30° **b) 72°** **c) 90°**

d) 127° **e) 200°** **f) 300°**

Expressa el resultat en funció de π i després en forma decimal.

Per exemple: $30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0{,}52$ rad

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0{,}52$ rad

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1{,}26$ rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad $\approx 1{,}57$ rad

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2{,}22$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9}$ rad $\approx 3{,}49$ rad

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad $\approx 5{,}24$ rad

3. **Passa a graus els angles següents:**

a) 2 rad **b)** 0,83 rad **c)** $\frac{\pi}{5}$ rad

d) $\frac{5\pi}{6}$ rad **e)** 3,5 rad **f)** π rad

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114° \ 35' \ 29{,}6''$ b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0{,}83 = 47° \ 33' \ 19{,}8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$ d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3{,}5 = 200° \ 32' \ 6{,}8''$ f) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$

4. **Completa la taula següent i afig-hi les raons trigonomètriques (sinus, cosinus i tangent) de cadascun dels angles. Et serà útil per al proper apartat:**

GRAUS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANTS			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRAUS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANTS			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en el siguiente apartado (página siguiente) del libro de texto. Tan solo falta la última columna, que es igual que la primera.

Pàgina 133

1. **Demostra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha + (-\beta)) = cos\,\alpha\, cos(-\beta) - sen\,\alpha\, sen(-\beta) =$$

$$= cos\,\alpha\, cos\,\beta - sen\,\alpha\,(-sen\,\beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + sen\,\alpha\, sen\,\beta$$

2. **Demostra la fórmula II.3 a partir de la fórmula:**

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

$$tg(\alpha - \beta) = tg(\alpha + (-\beta)) = \frac{tg\,\alpha + tg(-\beta)}{1 - tg\,\alpha\, tg(-\beta)} \overset{(*)}{=} \frac{tg\,\alpha + (-tg\,\beta)}{1 - tg\,\alpha\,(-tg\,\beta)} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

(*) Como $\left.\begin{array}{l} sen(-\alpha) = -sen\,\alpha \\ cos(-\alpha) = cos\,\alpha \end{array}\right\} \rightarrow tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$

3. **Demostra la fórmula II.3 a partir de les fórmules següents:**

$$\textit{sin}\,(\alpha - \beta) = \textit{sin}\,\alpha\,\textit{cos}\,\beta - \textit{cos}\,\alpha\,\textit{sin}\,\beta$$

$$\textit{cos}\,(\alpha - \beta) = \textit{cos}\,\alpha\,\textit{cos}\,\beta + \textit{sin}\,\alpha\,\textit{sin}\,\beta$$

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{sen\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha - \beta)} = \frac{sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} - \dfrac{cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\dfrac{cos\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} + \dfrac{sen\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $cos\,\alpha\,cos\,\beta$.

4. **Si *sin* 12° = 0,2 i *sin* 37° = 0,6, troba *cos* 12°, *tg* 12°, *cos* 37° i *tg* 37°. Calcula, després, a partir d'aquestes, les raons trigonomètriques de 49° i de 25°, utilitzant les fórmules (I) i (II).**

- $sen\ 12° = 0{,}2$

  $cos\ 12° = \sqrt{1 - sen^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

  $tg\ 12° = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $sen\ 37° = 0{,}6$

  $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

  $tg\ 37° = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

- $49° = 12° + 37°$, luego:

  $sen\ 49° = sen\ (12° + 37°) = sen\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sen\ 37° =$

  $= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

  $cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) = cos\ 12°\ cos\ 37° - sen\ 12°\ sen\ 37° =$

  $= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

  $tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \dfrac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} = \dfrac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$

  $\left(\text{Podría calcularse } tg\ 49° = \dfrac{sen\ 49°}{cos\ 49°}\right).$

- $25° = 37° - 12°$, luego:

  $sen\ 25° = sen\ (37° - 12°) = sen\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sen\ 12° =$

  $= 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

  $cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sen\ 37°\ sen\ 12° =$

  $= 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

  $tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \dfrac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \dfrac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$

5. **Demostra la igualtat següent:**

$$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a+b)+\sin(a-b)} = \frac{1}{tg\, a}$$

$$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{sen\,(a+b)+sen\,(a-b)} = \frac{\cos a \cos b - sen\, a\, sen\, b + \cos a \cos b + sen\, a\, sen\, b}{sen\, a \cos b + \cos a\, sen\, b + sen\, a \cos b - \cos a\, sen\, b} =$$

$$= \frac{2\cos a \cos b}{2\, sen\, a \cos b} = \frac{\cos a}{sen\, a} = \frac{1}{tg\, a}$$

6. **Demostra les tres fórmules (III.1), (III.2) i (III.3) fent $\alpha = \beta$ en les fórmules (I).**

$sen\, 2\alpha = sen\,(\alpha + \alpha) = sen\,\alpha \cos\alpha + \cos\alpha\, sen\,\alpha = 2\, sen\,\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - sen\,\alpha\, sen\,\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$tg\, 2\alpha = tg\,(\alpha + \alpha) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\alpha} = \dfrac{2\, tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

7. **Troba les raons trigonomètriques de 60° a partir de les de 30°.**

$sen\, 60° = sen\,(2 \cdot 30°) = 2\, sen\, 30° \cos 30° = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \cos(2 \cdot 30°) = \cos^2 30° - sen^2 30° = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$tg\, 60° = tg\,(2 \cdot 30°) = \dfrac{2\, tg\, 30°}{1 - tg^2 30°} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$

8. **Troba les raons trigonomètriques de 90° a partir de les de 45°.**

$sen\, 90° = sen\,(2 \cdot 45°) = 2\, sen\, 45° \cos 45° = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$\cos 90° = \cos(2 \cdot 45°) = \cos^2 45° - sen^2 45° = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$

$tg\, 90° = tg\,(2 \cdot 45°) = \dfrac{2\, tg\, 45°}{1 - tg^2 45°} = \dfrac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow$ No existe.

9. **Demostra que:**

$$\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\frac{2\, sen\,\alpha - sen\, 2\alpha}{2\, sen\,\alpha + sen\, 2\alpha} = \frac{2\, sen\,\alpha - 2\, sen\,\alpha \cos\alpha}{2\, sen\,\alpha + 2\, sen\,\alpha \cos\alpha} = \frac{2\, sen\,\alpha\,(1 - \cos\alpha)}{2\, sen\,\alpha\,(1 + \cos\alpha)} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Pàgina 134

10. **Seguint les indicacions que es donen, demostra detalladament les fórmules IV.1, IV.2 i IV.3.**

- $cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen^2 \frac{\alpha}{2}$

  Por la igualdad fundamental:

  $$cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2}$$

  De aquí:

  a) Sumando ambas igualdades:

  $$1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \rightarrow \quad cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \quad \rightarrow \quad cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}$$

  b) Restando las igualdades (2ª – 1ª):

  $$1 - cos\ \alpha = 2\ sen^2 \frac{\alpha}{2} \quad \rightarrow \quad sen^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{2} \quad \rightarrow \quad sen \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$$

- Por último:

  $$tg \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ \alpha/2}{cos\ \alpha/2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$$

11. **Sabent que** ***cos*** **78° = 0,2, calcula** ***sin*** **78° i** ***tg*** **78°. Troba les raons trigonomètriques de 39° aplicant-hi les fórmules de l'angle meitat.**

- $cos\ 78° = 0,2$

  $$sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2\ 78°} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

  $$tg\ 78° = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

- $$sen\ 39° = sen \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$$

  $$cos\ 39° = cos \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

  $$tg\ 39° = tg \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

12. **Troba les raons trigonomètriques de 30° a partir de** $\cos 60° = 0{,}5$**.**

- $\cos 60° = 0{,}5$
- $\sin 30° = \sin \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}5}{2}} = 0{,}5$

$$\cos 30° = \cos \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}5}{2}} = 0{,}866$$

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{tg} \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}5}{1 + 0{,}5}} = 0{,}577$$

13. **Troba les raons trigonomètriques de 45° a partir de** $\cos 90° = 0$**.**

- $\cos 90° = 0$
- $\sin 45° = \sin \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45° = \cos \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg} \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \sqrt{1} = 1$$

14. **Demostra que** $2\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} + \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$**.**

$$2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha) + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) =$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1 - \cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

15. **Demostra que** $\dfrac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$**.**

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Pàgina 135

16. Per demostrar les fórmules (V.3) i (V.4), fes els passos següents:

- **Expressa en funció de α i β:**

$$\cos(\alpha + \beta) = \text{..........} \qquad \cos(\alpha - \beta) = \text{..........}$$

- **Suma i resta com hem fet dalt i obtindràs dues expressions.**
- **Substituïx en les expressions anteriors:**

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \frac{A + B}{2} \qquad \beta = \frac{A - B}{2}$$

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

  $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

  Sumando $\rightarrow$ $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$ (1)

  Restando $\rightarrow$ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ (2)

- Llamando $\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \frac{A + B}{2}, \; \beta = \frac{A - B}{2}$ (al resolver el sistema)

- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

  (1) $\rightarrow$ $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}$

  (2) $\rightarrow$ $\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A + B}{2}\operatorname{sen}\frac{A - B}{2}$

17. Transforma en producte i calcula:

a) $\sin 75° - \sin 15°$ **b)** $\cos 75° + \cos 15°$ **c)** $\cos 75° - \cos 15°$

a) $\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 15° = 2\cos\frac{75° + 15°}{2}\operatorname{sen}\frac{75° - 15°}{2} =$

$$= 2\cos 45° \operatorname{sen} 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\cos 75° + \cos 15° = 2\cos\frac{75° + 15°}{2}\cos\frac{75° - 15°}{2} =$

$$= 2\cos 45° \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

c) $\cos 75° - \cos 15° = -2\operatorname{sen}\frac{75° + 15°}{2}\operatorname{sen}\frac{75° - 15°}{2} =$

$$= -2\operatorname{sen} 45° \cos 30° = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

18. **Expressa en forma de producte el numerador i el denominador d'aquesta fracció i simplifica'n el resultat:**

$$\frac{\sin 4a + \sin 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$$

$$\frac{sen\ 4a + sen\ 2a}{cos\ 4a + cos\ 2a} = \frac{2\ sen \frac{4a + 2a}{2} \cos \frac{4a - 2a}{2}}{2 \cos \frac{4a + 2a}{2} \cos \frac{4a - 2a}{2}} = \frac{2\ sen\ 3a}{2 \cos 3a} = tg\ 3a$$

Pàgina 137

1. **Resol aquestes equacions:**

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ **b)** $2\sin^2 x - 1 = 0$

c) $tg^2\, x - tg\, x = 0$ **d)** $2\sin^2 x + 3\cos x = 3$

a) $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 60°,\ x_2 = 300° \\ -1 \rightarrow x_3 = 180° \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\ sen^2\, x - 1 = 0 \rightarrow sen^2\, x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45°,\ x_2 = 135°$
- Si $sen\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = -45° = 315°,\ x_4 = 225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $tg^2\, x - tg\, x = 0 \rightarrow tg\, x\,(tg\, x - 1) = 0 \begin{cases} tg\, x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ tg\, x = 1 \rightarrow x_3 = 45°,\ x_4 = 225° \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\ sen^2\, x + 3 \cos x = 3 \overset{(*)}{\rightarrow} 2\,(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 3$

(*) Como $sen^2\, x + \cos^2 x = 1 \rightarrow sen^2\, x = 1 - \cos^2 x$

$2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 3 \rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:
- Si $\cos x = 1 \rightarrow x_1 = 0°$
- Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x_2 = 60°,\ x_3 = -60° = 300°$

Las tres soluciones son válidas.

2. **Resol:**

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$ **b)** $tg\ 2x + 2\cos x = 0$

c) $\sqrt{2}\cos (x/2) - \cos x = 1$ **d)** $2\sin x \cos^2 x - 6\sin^3 x = 0$

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1 \rightarrow 4(\cos^2 x - sen^2 x) + 3\cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 3\cos x = 1 \rightarrow 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 8\cos^2 x - 4 + 3\cos x = 1 \Rightarrow 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $\cos x = 0{,}625 \rightarrow x_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13'',\ x_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg\ 2x + 2\cos x = 0 \rightarrow \dfrac{2\ tg\ x}{1 - tg^2 x} + 2\cos x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{tg\ x}{1 - tg^2 x} + \cos x = 0 \rightarrow \frac{sen\ x/\cos x}{1 - (sen^2 x/\cos^2 x)} + \cos x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{sen\ x \cos x}{\cos^2 x - sen^2 x} + \cos x = 0 \rightarrow sen\ x \cos x + \cos x(\cos^2 x - sen^2 x) = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow \cos x(sen\ x + \cos^2 x - sen^2 x) = 0 \rightarrow \cos x(sen\ x + 1 - sen^2 x - sen^2 x) \rightarrow$

$\rightarrow \cos x(1 + sen\ x - 2\ sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 + sen\ x - 2\ sen^2 x = 0 \rightarrow sen\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $\cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270°$
- Si $sen\ x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x_3 = 210°,\ x_4 = 330° = -30°$
- Si $sen\ x = 1 \rightarrow x_5 = 90° = x_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}} - \cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1 + \cos x} - \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos x} = 1 + \cos x \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos x = 1 + \cos^2 x + 2\cos x \rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0$

- Si $\cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270°$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son:

$$x_1 = 90° \text{ y } x_3 = 180°$$

d) $2\,sen\,x\,cos^2 x - 6\,sen^3 x = 0 \rightarrow 2\,sen\,x\,(cos^2 x - 3\,sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\,sen\,x\,(cos^2 x + sen^2 x - 4\,sen^2 x) = 0 \rightarrow 2\,sen\,x\,(1 - 4\,sen^2 x) = 0$

- Si $sen\,x = 0 \rightarrow x_1 = 0°, x_2 = 180°$
- Si $sen^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow sen\,x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 30°, x_4 = 150°, x_5 = 210°, x_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

3. Transforma en producte *sin* 3*x* – *sin x* i resol després l'equació *sin* 3*x* – – *sin x* = 0.

$sen\,3x - sen\,x = 0 \rightarrow 2\,cos\,\frac{3x+x}{2}\,sen\,\frac{3x-x}{2} = 0 \rightarrow 2\,cos\,2x\,sen\,x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\,2x = 0 \\ sen\,x = 0 \end{cases}$$

- Si $cos\,2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 90° & \rightarrow x_1 = 45° \\ 2x = 270° & \rightarrow x_2 = 135° \\ 2x = 90° + 360° & \rightarrow x_3 = 225° \\ 2x = 270° + 360° & \rightarrow x_4 = 315° \end{cases}$
- Si $sen\,x = 0 \Rightarrow x_5 = 0°, x_6 = 180°$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4. Resol les equacions trigonomètriques següents:

a) $\mathbf{sin\,(\pi - x) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\,\pi}$

b) $\mathbf{sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2}\,sin\,x = 0}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\,(\pi - x) = sen\,x \\ cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -sen\,x \\ cos\,\pi = -1 \end{array}\right\}$ Entonces, la ecuación queda:

$$sen\,x = -sen\,x - 1 \rightarrow 2\,sen\,x = -1 \rightarrow sen\,x = \frac{-1}{2}$$

Si $sen\,x = \frac{-1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6}$ rad, $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ rad

Al comprobar vemos:

$x_1 = \frac{7\pi}{6} \rightarrow sen\,(\pi - x) = sen\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = sen\,\frac{-\pi}{6} = \frac{-1}{2}$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}\right) = cos\,\frac{2\pi}{6} = cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Luego la solución es válida, pues:

$$sen\ (\pi - x) = \frac{-1}{2} = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi = \frac{1}{2} + (-1)$$

$$x_2 = \frac{11\pi}{6} \rightarrow sen\ (\pi - x) = sen\left(\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{11\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{-2\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego también es válida esta solución, pues:

$$sen\ (\pi - x) = \frac{-1}{2} = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi = \frac{1}{2} + (-1)$$

Por tanto, las dos soluciones son válidas: $x_1 = \frac{7\pi}{6}$ rad y $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ rad

b) $sen\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = sen\ \frac{\pi}{4}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{4}\ sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x$

Luego la ecuación queda:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x + \sqrt{2}\ sen\ x = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\ x + sen\ x = 0 \rightarrow cos\ x = -sen\ x \rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4}\ \text{rad},\ x_2 = \frac{7\pi}{4}\ \text{rad}$$

Comprobamos que ninguna solución vale. Luego la ecuación no tiene solución.

5. Escriu, en radiants, l'expressió general de tots els angles que verifiquen:

a) $tg\ x = -\sqrt{3}$ **b)** $sin\ x = cos\ x$

c) $sin^2\ x = 1$ **d)** $sin\ x = tg\ x$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\ \pi\ \text{rad} = x\ \text{con}\ k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\ \pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Si}\ sen\ x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\ \pi\ \text{rad} \\ \text{Si}\ sen\ x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\ \pi\ \text{rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\ \pi\ \text{rad con}\ k \in \mathbb{Z}$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$\left.\begin{array}{l} \text{O bien}\ sen\ x = 0 \rightarrow x = k\ \pi\ \text{rad} \\ \text{O bien}\ cos\ x = 1 \rightarrow x = 2k\ \pi\ \text{rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = k\ \pi\ \text{rad con}\ k \in \mathbb{Z}$

Pàgina 142

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER A PRACTICAR

Graus i radiants

1 **Expressa en graus sexagesimals els angles següents donats en radiants:**

a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$

d) $\frac{5\pi}{4}$ **e)** $\frac{7\pi}{6}$ **f)** $\frac{9\pi}{2}$

☛ ***Fes-ho mentalment tenint en compte que: π radiants = 180°.***

a) 30° b) 120° c) 240°

d) 225° e) 210° f) 810°

2 **Expressa en graus sexagesimals els angles següents donats en radiants:**

a) **1,5** **b)** **3,2**

c) **5** **d)** **2,75**

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 1,5 = 85°\ 56'\ 37''$ b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3,2 = 183°\ 20'\ 47''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 5 = 286°\ 28'\ 44''$ d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2,75 = 157°\ 33'\ 48''$

3 **Passa a radiants els angles següents donats en graus. Expressa'ls en funció de π i en forma decimal.**

a) **40°** **b)** **108°** **c)** **135°**

d) **240°** **e)** **270°** **f)** **126°**

☛ ***Simplifica l'expressió que hi obtens sense multiplicar per 3,14...***

a) $\frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \approx 0,7$ ***rad***

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 40° = \frac{2\pi}{9} \approx 0,7$ rad b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 108° = \frac{3\pi}{5} \approx 1,88$ rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 135° = \frac{3\pi}{4} \approx 2,36$ rad d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 240° = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 270° = \frac{3\pi}{2} \approx 4,71$ rad f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 126° = \frac{7\pi}{10} \approx 2,2$ rad

4 **Troba el resultat de les operacions següents sense utilitzar la calculadora:**

a) $5\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $5\,tg\,\pi + 3\cos\frac{\pi}{2} - 2\,tg\,0 + \sin\frac{3\pi}{2} - 2\sin 2\pi$

c) $\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin\pi - \frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{2}$

Comprova el resultat obtingut utilitzant la calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + (-1) - 2 \cdot 0 = -1$

c) $\frac{2}{3} \cdot 1 - 4(-1) + 3 \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1 = 3$

5 **Prova que:**

a) $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{2} = 3$

a) $4\,sen\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sen\,\frac{2\pi}{3} + 4\,sen\,\frac{\pi}{6} - 2\,sen\,\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

6 **Troba el valor exacte de cada una d'aquestes expressions sense utilitzar la calculadora:**

a) $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi$

b) $\cos\pi - \cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2}$

c) $\sin\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6}$

Comprova els resultats amb la calculadora.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

b) $-1 - 1 + 0 - 0 = -2$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

7 **Troba el valor exacte d'aquestes expressions sense utilitzar la calculadora:**

a) $\boldsymbol{sin \frac{5\pi}{4} + cos \frac{3\pi}{4} - sin \frac{7\pi}{4}}$

b) $\boldsymbol{cos \frac{5\pi}{3} + tg \frac{4\pi}{3} - tg \frac{7\pi}{6}}$

c) $\boldsymbol{\sqrt{3}\, cos \frac{\pi}{6} + sin \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\, cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\, sin \frac{\pi}{3}}$

Comprova els resultats amb la calculadora.

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

8 **En cada cas troba, en radiants, dos valors per l'angle α tals que:**

a) $\boldsymbol{sin\, \alpha = 0{,}32}$ **b)** $\boldsymbol{cos\, \alpha = 0{,}58}$

c) $\boldsymbol{tg\, \alpha = -1{,}5}$ **d)** $\boldsymbol{sin\, \alpha = -0{,}63}$

a) $\alpha_1 = 0{,}33$; $\alpha_2 = 2{,}82$ b) $\alpha_1 = 0{,}95$; $\alpha_2 = 5{,}33$

c) $\alpha_1 = -0{,}98$; $\alpha_2 = 2{,}16$ d) $\alpha_1 = -0{,}68$; $\alpha_2 = 3{,}82$

9 **Indica, sense passar a graus, en quin quadrant es troba cadascun dels angles següents:**

a) 2 rad **b) 3,5 rad** **c) 5 rad**

☛ ***Tin en compte que:***

$$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57; \quad \pi \approx 3{,}14; \quad \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7; \quad 2\pi \approx 6{,}28$$

a) 2.° cuadrante b) 3.^{er} cuadrante c) 4.° cuadrante

Fórmules trigonomètriques

10 **Troba les raons trigonomètriques de l'angle de 75° sabent que 75° = 30° + 45°.**

sen 75° = *sen* (30° + 45°) = *sen* 30° *cos* 45° + *cos* 30° *sen* 45° =

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°) = cos\ 30°\ cos\ 45° - sen\ 30°\ sen\ 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$tg\ 75° = tg\ (30° + 45°) = \frac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30°\ tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3}/3 + 1}{1 - \sqrt{3}/3} = \frac{(\sqrt{3} + 3)/3}{(\sqrt{3} - 3)/3} =$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

NOTA: También podemos resolverlo como sigue:

$$tg\ 75° = \frac{sen\ 75°}{cos\ 75°} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{6 - 2} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{4} =$$

$$= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

11 **Sabent que $sin\ x = \frac{3}{5}$ i que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sense trobar prèviament el valor de x:**

a) $sin\ 2x$ **b)** $tg\ \frac{x}{2}$ **c)** $sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **e)** $cos\ \frac{x}{2}$ **f)** $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

☛ ***Calcula cos x i tg x i després aplica-hi les fórmules.***

$cos\ x = -\sqrt{1 - sen^2\ x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ (Negativo, por ser del 2.° cuadrante).

$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x} = -\frac{3}{4}$

a) $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

b) $tg\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{\frac{1 - (-4/5)}{1 + (-4/5)}} = \sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = 3$

Signo positivo, pues si $x \in 2.°$ cuadrante, entonces $\frac{x}{2} \in 1.^{er}$ cuadrante.

c) $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = sen\ x\ cos\ \frac{\pi}{6} + cos\ x\ sen\ \frac{\pi}{6} =$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\, x\, cos\, \frac{\pi}{3} + sen\, x\, sen\, \frac{\pi}{3} =$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$$

e) $cos\, \frac{x}{2} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{1 + cos\, x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 4/5}{2}} = \sqrt{\frac{1/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

(*) Signo positivo, porque $\frac{x}{2} \in 1.^{er}$ cuadrante.

f) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\, x + tg\, \pi/4}{1 - tg\, x\, tg\, \pi/4} = \frac{-3/4 + 1}{1 - (-3/4) \cdot 1} = \frac{1 - 3/4}{1 + 3/4} = \frac{1}{7}$

Pàgina 143

12 **Troba les raons trigonomètriques de l'angle de 15° de dues formes, considerant:**

a) $15° = 45° - 30°$ **b)** $15° = \frac{30°}{2}$

a) $sen\, 15° = sen\, (45° - 30°) = sen\, 45°\, cos\, 30° - cos\, 45°\, sen\, 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}258819$$

$cos\, 15° = cos\, (45° - 30°) = cos\, 45°\, cos\, 30° + sen\, 45°\, sen\, 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0{,}965926$$

$tg\, 15° = \frac{sen\, 15°}{cos\, 15°} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} =$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}267949$$

b) $sen\, 15° = sen\, \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\, 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0{,}258819$$

$cos\, 15° = cos\, \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\, 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0{,}9659258$

$tg\, 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{0{,}258819}{0{,}9659258} = 0{,}2679491$

13 **Sabent que *sin x* = 2/3 i que *x* és un angle del primer quadrant, calcula:**

a) $\boldsymbol{sin\ 2x}$ **b)** $\boldsymbol{tg\ \frac{x}{2}}$ **c)** $\boldsymbol{cos\ (30° - x)}$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ x = \dfrac{2}{3} \\ x \in 1.^{er} \text{ cuadrante} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} cos\ x,\ tg\ x > 0 \\ \dfrac{x}{2} \in 1.^{er} \text{ cuadrante} \to \left\{\begin{array}{l} sen\ x/2 > 0 \\ cos\ x/2 > 0 \\ tg\ x/2 > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- $cos\ x = \sqrt{1 - sen^2\ x} = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
- $tg\ x = \dfrac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

a) $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x = 2 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $tg\ \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{\dfrac{1 - 2\sqrt{5}/5}{1 + 2\sqrt{5}/5}} = \sqrt{\dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}}} =$

$= \sqrt{\dfrac{25 + 4 \cdot 5 - 20\sqrt{5}}{25 - 4 \cdot 5}} = \sqrt{\dfrac{45 - 20\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

c) $cos\ (30° - x) = cos\ 30°\ cos\ x + sen\ 30°\ sen\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{5}}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} =$

$= \dfrac{\sqrt{15}}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3\sqrt{15} + 5}{15}$

14 **Si *tg* α = –4/3 i 90° < α < 180°, calcula:**

a) $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ **b)** $\boldsymbol{cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)}$

$$90° < \alpha < 180° \to \left\{\begin{array}{l} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right.$$

Además, $\dfrac{\alpha}{2} \in 1.^{er}$ cuadrante

- $tg\ \alpha = -\dfrac{4}{3}$
- $\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 = \dfrac{16}{9} + 1 = \dfrac{25}{9} \to cos^2\ \alpha = \dfrac{9}{25} \to cos\ \alpha = -\dfrac{3}{5}$
- $sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

a) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\ \dfrac{\pi}{2}\ cos\ \alpha - cos\ \dfrac{\pi}{2}\ sen\ \alpha = 1 \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) - 0 \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

b) $cos \left(180° - \frac{\alpha}{2}\right) = cos\ 180°\ cos\ \frac{\alpha}{2} + sen\ 180°\ sen\ \frac{\alpha}{2} = -cos\ \frac{\alpha}{2} =$

$$= -\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + (-3/5)}{2}} = -\sqrt{\frac{5-3}{10}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

15 **Sabem que** $\boldsymbol{cos\ x = -\frac{3}{4}}$ **i** $\boldsymbol{sin\ x < 0}$**.**

Sense trobar el valor de $\boldsymbol{x}$**, calcula:**

a) $\boldsymbol{sin\ x}$ **b)** $\boldsymbol{cos\ (\pi + x)}$ **c)** $\boldsymbol{cos\ 2x}$

d) $\boldsymbol{tg\ \frac{x}{2}}$ **e)** $\boldsymbol{sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ **f)** $\boldsymbol{cos \left(\pi - \frac{x}{2}\right)}$

$\left.\begin{array}{l} cos\ x = -3/4 \\ sen\ x < 0 \end{array}\right\} \rightarrow x \in 3.^{er}$ cuadrante $\Rightarrow \frac{x}{2} \in 2.°$ cuadrante

a) $sen\ x = -\sqrt{1 - cos^2\ x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $cos\ (\pi + x) = cos\ \pi\ cos\ x - sen\ \pi\ sen\ x = -cos\ x = \frac{3}{4}$

c) $cos\ 2x = cos^2\ x - sen^2\ x = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

d) $tg\ \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = -\sqrt{\frac{1 + 3/4}{1 - 3/4}} = \sqrt{\frac{7}{1}} = \sqrt{7}$

e) $sen \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\ \frac{\pi}{2}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{2}\ sen\ x = cos\ x = -\frac{3}{4}$

f) $cos \left(\pi - \frac{x}{2}\right) = cos\ \pi\ cos\ \frac{x}{2} + sen\ \pi\ sen\ \frac{x}{2} = -cos\ \frac{x}{2} =$

$$= -\left(-\sqrt{\frac{1 + cos\ x}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1 - 3/4}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$

16 **Si** $\boldsymbol{cos\ 78° = 0{,}2}$ **i** $\boldsymbol{sin\ 37° = 0{,}6}$**, calcula** $\boldsymbol{sin\ 41°}$**,** $\boldsymbol{cos\ 41°}$ **i** $\boldsymbol{tg\ 41°}$**.**

$41° = 78° - 37°$

- $sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2\ 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$
- $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Ahora, ya podemos calcular:

- $sen\ 41° = sen\ (78° - 37°) = sen\ 78°\ cos\ 37° - cos\ 78°\ sen\ 37° =$
$$= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$$
- $cos\ 41° = cos\ (78° - 37°) = cos\ 78°\ cos\ 37° + sen\ 78°\ sen\ 37° =$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$$
- $tg\ 41° = \dfrac{sen\ 41°}{cos\ 41°} = \dfrac{0{,}664}{0{,}748} = 0{,}8877$

17 **Si $tg\ (\alpha + \beta) = 4$ i $tg\ \alpha = -2$, troba $tg\ 2\beta$.**

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} \rightarrow 4 = \frac{-2 + tg\ \beta}{1 + 2\ tg\ \beta} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 + 8\ tg\ \beta = -2 + tg\ \beta \rightarrow 7\ tg\ \beta = -6 \rightarrow$$
$$\rightarrow tg\ \beta = -\frac{6}{7}$$

Luego:

$$tg\ 2\beta = \frac{2\ tg\ \beta}{1 - tg^2\ \beta} = \frac{2 \cdot (-6/7)}{1 - 36/49} = \frac{-12/7}{13/49} = \frac{-12 \cdot 49}{7 \cdot 13} = -\frac{84}{13}$$

Equacions trigonomètriques

18 **Resol les equacions següents:**

a) $2\ cos^2\ x - sin^2\ x + 1 = 0$ **b) $sin^2\ x - sin\ x = 0$**

c) $2\ cos^2\ x - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

☛ ***b) i c) són equacions de 2n grau incompletes.***

a) $2\ cos^2\ x - \underbrace{sen^2\ x + 1}_{cos^2\ x} = 0 \rightarrow 2\ cos^2\ x - cos^2\ x = 0$

$$cos^2\ x = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\ \pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\ \pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $sen\ x\ (sen\ x - 1) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0°, \ x_2 = 180° \\ sen\ x = 1 \ \rightarrow \ x_3 = 90° \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

c) $cos\ x\left(2\ cos\ x - \sqrt{3}\right) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 90°, \ x_2 = 270° \\ cos\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ \rightarrow \ x_3 = 30°, \ x_4 = 330° \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

19 **Resol:**

a) $\boldsymbol{sin^2\ x - cos^2\ x = 1}$ **b)** $\boldsymbol{cos^2\ x - sin^2\ x = 0}$

c) $\boldsymbol{2\ cos^2\ x + sin\ x = 1}$ **d)** $\boldsymbol{3\ tg^2\ x - \sqrt{3}\ tg\ x = 0}$

a) $(1 - cos^2\ x) - cos^2\ x = 1 \ \rightarrow \ 1 - 2\ cos^2 x = 1 \ \rightarrow \ cos^2\ x = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ cos\ x = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $(1 - sen^2\, x) - sen^2\, x = 0 \;\rightarrow\; 1 - 2\, sen^2\, x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen^2\, x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; sen\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 45°,\; x_2 = 135°$
- Si $sen\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 225°,\; x_4 = 315°$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 &= 315° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\,(1 - sen^2\, x) + sen\, x = 1 \;\rightarrow\; 2 - 2\, sen^2\, x + sen\, x = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\, sen^2\, x - sen\, x - 1 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\, x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\rightarrow\; x_1 = 90° \\ -1/2 \;\rightarrow\; x_2 = 210°,\; x_3 = 330° \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $tg\ x\left(3\ tg\ x - \sqrt{3}\right) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} tg\ x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0°, \ x_2 = 180° \\ tg\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow \ x_3 = 30°, \ x_4 = 210° \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$$x_1 = k \cdot 180° = k\pi \ \text{ y } \ x_2 = 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

20 **Resol les equacions següents:**

a) $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}}$

b) $\boldsymbol{sin\ 2x - 2\ cos^2\ x = 0}$

☛ ***Desenvolupa sin 2x i trau-ne factor comú.***

c) $\boldsymbol{cos\ 2x - 3\ sin\ x + 1 = 0}$

☛ ***Desenvolupa cos 2x i substituïx*** $\boldsymbol{cos^2\ x = 1 - sin^2\ x}$.

d) $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\ sin\ x = 0}$

a) $sen\ \frac{\pi}{6}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{6}\ sen\ x + cos\ \frac{\pi}{3}\ cos\ x + sen\ \frac{\pi}{3}\ sen\ x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ sen\ x + \frac{1}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ sen\ x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\ cos\ x + \frac{1}{2}\ cos\ x = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ cos\ x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \ \rightarrow \ sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) + cos\ 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \ \rightarrow \ sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{3\pi}{3}\right) + cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\,\pi = 60° + k \cdot 360° \\[2ex] x_2 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\,\pi = 300° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2\,sen\,x\,cos\,x - 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow\; 2\,cos\,x\,(sen\,x - cos\,x) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ sen\,x = cos\,x \;\rightarrow\; x_3 = 45°,\; x_4 = 225° \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\[2ex] x_4 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\[2ex] x_2 = 45° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos^2\,x - sen^2\,x - 3\,sen\,x + 1 = 0 \;\rightarrow\; 1 - sen^2\,x - sen^2\,x - 3\,sen\,x + 1 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow 1 - 2\,sen^2\,x - 3\,sen\,x + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2\,sen^2\,x + 3\,sen\,x - 2 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow sen\,x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \;\rightarrow\; x_1 = 30°,\; x_2 = 150° \\ -2 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible¡, pues } |sen\,x| \le 1 \end{cases}$$

Comprobamos que las dos soluciones son válidas.

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\,\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\,\dfrac{\pi}{4}\,cos\,x + cos\,\dfrac{\pi}{4}\,sen\,x - \sqrt{2}\,sen\,x = 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,cos\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,sen\,x - \sqrt{2}\,sen\,x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,sen\,x = 0 \;\rightarrow\; \cos x - sen\,x = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \cos x = sen\,x \;\rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{4},\; x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi = 225° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45° + k \cdot 180° \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

21 **Resol aquestes equacions:**

a) $4\,sin^2 x\,cos^2 x + 2\,cos^2 x - 2 = 0$

☛ ***En fer*** $sin^2 x = 1 - cos^2 x$, ***resulta una equació biquadrada.***

Fes $cos^2 x = z$ ***i comprova si són vàlides les solucions que n'obtens.***

b) $4\,sin^2 x + sin\,x\,cos\,x - 3\,cos^2 x = 0$

☛ ***Dividix entre*** $cos^2 x$ ***i obtindràs una equació amb*** $tg\,x$.

c) $cos^2 \frac{x}{2} + cos\,x - \frac{1}{2} = 0$

d) $tg^2 \frac{x}{2} + 1 = cos\,x$

e) $2\,sin^2 \frac{x}{2} + cos\,2x = 0$

a) $4(1 - cos^2 x)\,cos^2 x + 2\,cos^2 x - 2 = 0$

$4\,cos^2 x - 4\,cos^4 x + 2\,cos^2 x - 2 = 0$

$4\,cos^4 x - 6\,cos^2 x + 2 = 0 \;\rightarrow\; 2\,cos^4 x - 3\,cos^2 x + 1 = 0$

Sea $cos^2 x = z \;\rightarrow\; cos^4 x = z^2$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$z_1 = 1 \;\rightarrow\; cos\,x = \pm 1 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180°$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; cos\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 45°,\; x_4 = 315°;\; x_5 = 135°,\; x_6 = 225°$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_5 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_6 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) Dividiendo por $cos^2\, x$:

$$\frac{4\, sen^2\, x}{cos^2\, x} + \frac{sen\, x\, cos\, x}{cos^2\, x} - \frac{3\, cos^2\, x}{cos^2\, x} = 0 \;\rightarrow\; 4\, tg^2\, x + tg\, x - 3 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; tg\, x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8} = \begin{cases} \dfrac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' \\ x_2 = 216°\ 52'\ 11{,}6'' \end{cases} \\ -1 \rightarrow \begin{cases} x_3 = 135° \\ x_4 = 315° \end{cases} \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{\pi}{5} + 2k\,\pi \\ x_2 = 216°\ 52'\ 11{,}6'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{6\pi}{5} + 2k\,\pi \\ x_3 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{5} + 2k\,\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{5} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{\pi}{5} + k\,\pi \\ x_2 = 135° + k \cdot 180° = \dfrac{3\pi}{4} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $\dfrac{1 + \cos x}{2} + \cos x - \dfrac{1}{2} = 0 \;\rightarrow\; 1 + \cos x + 2\cos x - 1 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 3\cos x = 0 \;\rightarrow\; \cos x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270°$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + 1 = \cos x \;\rightarrow\; 1 - \cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2 = \cos x + \cos^2 x \;\rightarrow\; \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} 1 \;\rightarrow\; x = 0° \\ -2 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible!, pues } |\cos x| \le 1 \end{cases}$

Luego: $x = k \cdot 360° = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

e) $2 \cdot \dfrac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \;\rightarrow\; 2\cos^2 x - \cos x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \cos x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ \cos x = 1/2 \;\rightarrow\; x_3 = 60°,\; x_4 = 300° \end{cases}$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 60° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 = 300° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 = 60° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 = 300° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Identitats trigonomètriques

22 **Demostra que:**

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$$

☛ ***Aplica les fórmules de sin (α + β) i sin (α – β).***

Dividix el numerador i el denominador entre cos α cos β i simplifica.

$$\frac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha-\beta)} = \frac{sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,sen\,\beta}{sen\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,sen\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\,sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{sen\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\,sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $\cos\alpha\cos\beta$.

23 **Prova que** $2\,tg\,x\cos^2\frac{x}{2} - \sin x = tg\,x$.

☛ ***Substituïx*** $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.

Como $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

Y sustituyendo en la expresión:

$$2\,tg\,x\cos^2\frac{x}{2} - sen\,x = 2\,\frac{sen\,x}{\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{2} - sen\,x =$$

$$= \frac{sen\,x\,(1+\cos x) - sen\,x\cos x}{\cos x} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{sen\,x\,[1+\cos x - \cos x]}{\cos x} = \frac{sen\,x}{\cos x} = tg\,x$$

(*) Sacando factor común.

24 **Demostra que:**

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos x$$

☛ ***Desenvolupa i substituïx les raons de*** $\frac{\pi}{3}$ ***i*** $\frac{2\pi}{3}$.

$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) =$

$= \left[cos\, x\, cos\, \frac{\pi}{3} - sen\, x\, sen\, \frac{\pi}{3}\right] - \left[cos\, x\, cos\, \frac{2\pi}{3} - sen\, x\, sen\, \frac{2\pi}{3}\right] =$

$= \left[(cos\, x)\, \frac{1}{2} - (sen\, x)\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \left[(cos\, x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (sen\, x)\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$

$= \frac{1}{2}\, cos\, x - \frac{\sqrt{3}}{2}\, sen\, x + \frac{1}{2}\, cos\, x + \frac{\sqrt{3}}{2}\, sen\, x = cos\, x$

25 **Demostra que:**

$$\boldsymbol{cos\, \alpha\, cos\, (\alpha - \beta) + sin\, \alpha\, sin\, (\alpha - \beta) = cos\, \beta}$$

☛ ***Aplica les fórmules de la diferència d'angles, simplifica i extrau-ne factor comú.***

$cos\, \alpha\, cos\, (\alpha - \beta) + sen\, \alpha\, sen\, (\alpha - \beta) =$

$= cos\, \alpha\, (cos\, \alpha\, cos\, \beta + sen\, \alpha\, sen\, \beta) + sen\, \alpha\, (sen\, \alpha\, cos\, \beta - cos\, \alpha\, sen\, \beta) =$

$= cos^2\, \alpha\, cos\, \beta + cos\, \alpha\, sen\, \alpha\, sen\, \beta + sen^2\, \alpha\, cos\, \beta - sen\, \alpha\, cos\, \alpha\, sen\, \beta =$

$= cos^2\, \alpha\, cos\, \beta + sen^2\, \alpha\, cos\, \beta \stackrel{(*)}{=} cos\, \beta\, (cos^2\, \alpha + sen^2\, \alpha) = cos\, \beta \cdot 1 = cos\, \beta$

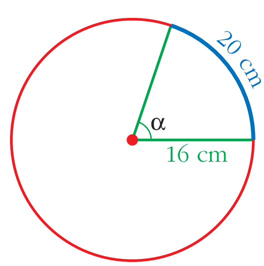
(*) Extraemos factor común.

Pàgina 144

PER A RESOLDRE

26 **En una circumferència de 16 cm de radi, un arc fa 20 cm.**

Troba'n l'angle central en graus i en radiants.



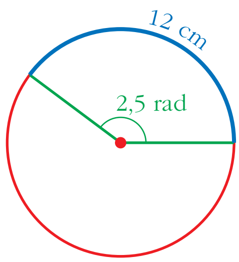
Como la circunferencia completa (100,53 cm) son 2π rad, entonces:

$$\frac{100{,}53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100{,}53} = 1{,}25 \text{ rad}$$

$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot 1{,}25 = 71°\ 37'\ 11''$

27 **En una determinada circumferència, a un arc de 12 cm de longitud li correspon un angle de 2,5 radiants.**

Quin és el radi d'aquesta circumferència?



$$\frac{2{,}5 \text{ rad}}{1 \text{ rad}} = \frac{12 \text{ cm}}{R \text{ cm}} \rightarrow R = \frac{12}{2{,}5} = 4{,}8 \text{ cm}$$

28 **Troba, en radiants, l'angle comprés entre 0 i 2π tal que les seues raons trigonomètriques coincidisquen amb les de $\frac{11\pi}{4}$.**

$0 < \alpha < 2\pi$

$$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{4} \rightarrow \frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

29 **Demostra:**

$$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + tg\,\alpha\; tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta}$$

$$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + sen\,\alpha\; sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\; sen\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{sen\,\alpha\; sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{sen\,\alpha\; sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{1 + tg\,\alpha\; tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre: $\cos\alpha\cos\beta$

30 **Simplifica l'expressió:**

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$$

Calcula'n el valor per a $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

$$\frac{sen\,2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{sen^2\,\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{sen\,\alpha}$$

Por tanto, si $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{sen\,2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$

31 **Prova que:**

$$\frac{2 sin\ \alpha - sin\ 2\alpha}{2 sin\ \alpha + sin\ 2\alpha} = tg^2\ \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} =$$

$$= \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} = tg^2\ \frac{\alpha}{2}$$

32 **Simplifica:**

$$\frac{2 cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha}$$

☛ ***En desenvolupar el numerador obtindràs una diferència de quadrats.***

$$\frac{2\ cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\ (cos\ 45°\ cos\ \alpha - sen\ 45°\ sen\ \alpha)\ (cos\ 45°\ cos\ \alpha + sen\ 45°\ sen\ \alpha)}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\ (cos^2\ 45°\ cos^2\ \alpha - sen^2\ 45°\ sen^2\ \alpha)}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left[\left(\sqrt{2}/2\right)^2\ cos^2\ \alpha - \left(\sqrt{2}/2\right)^2\ sen^2\ \alpha\right]}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} = \frac{2 \cdot 1/2\ cos^2\ \alpha - 2 \cdot 1/2\ sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} = 1$$

33 **Resol les equacions següents:**

a) $cos\ 2x + 3\ sin\ x = 2$

b) $tg\ 2x \cdot tg\ x = 1$

c) $cos\ x\ cos\ 2x + 2\ cos^2\ x = 0$

d) $2\ sin\ x = tg\ 2x$

e) $\sqrt{3}\ sin\ \frac{x}{2} + cos\ x - 1 = 0$

f) $sin\ 2x\ cos\ x = 6\ sin^3\ x$

g) $tg \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x = 1$

a) $cos^2\ x - sen^2\ x + 3\ sen\ x = 2 \ \rightarrow\ 1 - sen^2\ x - sen^2\ x + 3\ sen\ x = 2 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 2\ sen^2\ x - 3\ sen\ x + 1 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ sen\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ ⟨ $1 \ \rightarrow\ x_1 = 90°$; $1/2 \ \rightarrow\ x_1 = 30°,\ x_2 = 150°$

Las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2\,x} \cdot tg\,x = 1 \;\rightarrow\; 2\,tg^2\,x = 1 - tg^2\,x \;\rightarrow\; tg^2\,x = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; tg\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 30°,\; x_2 = 210° \\ x_3 = 150°,\; x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 180° = \dfrac{5\pi}{6} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos\,x\,(cos^2\,x - sen^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\,cos^3\,x - cos\,x + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x\,(2\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 1) = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270°$

$$cos\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \begin{cases} \approx -1{,}366 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible!, pues } |cos\,x| \le -1 \\ \approx 0{,}366 \;\rightarrow\; x_3 = 68°\,31'\,51{,}1'',\; x_4 = 291°\,28'\,8{,}9'' \end{cases}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 68°\ 31'\ 51{,}1'' + k \cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 291°\ 28'\ 8{,}9'' + k \cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Agrupadas, serían:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 68°\ 31'\ 51{,}1'' + k \cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 291°\ 28'\ 8{,}9'' + k \cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

d) $2\ sen\ x = \dfrac{2\ tg\ x}{1 - tg^2\ x} \rightarrow 2\ sen\ x - 2\ sen\ x\ tg^2\ x = 2\ tg\ x \rightarrow$

$\rightarrow sen\ x - sen\ x\ \dfrac{sen^2\ x}{cos^2\ x} = \dfrac{sen\ x}{cos\ x} \rightarrow$

$\rightarrow sen\ x\ cos^2\ x - sen\ x\ sen^2\ x = sen\ x\ cos\ x \rightarrow$

$\rightarrow sen\ x\ (cos^2\ x - sen^2\ x - cos\ x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow sen\ x\ (cos^2\ x - 1 + cos^2\ x - cos\ x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\ x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ 2\ cos^2\ x - cos\ x - 1 = 0° \rightarrow cos\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \end{array}\right.$$

$$= \begin{cases} 1 \rightarrow x_3 = 0° = x_1 \\ -1/2 \rightarrow x_4 = 240°,\ x_5 = 120° \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_5 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupando soluciones, quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

e) $\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}+\cos x-1=0 \rightarrow \dfrac{3-3\cos x}{2}=(1-\cos x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 3-3\cos x=2(1+\cos^2 x-2\cos x) \rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4}= \begin{cases} 1 \rightarrow x_1=0° \\ -1/2 \rightarrow x_2=120°,\ x_3=240° \end{cases}$

Al comprobar, vemos que las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k\cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 &= 120°+k\cdot 360° = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ x_3 &= 240°+k\cdot 360° = \frac{4\pi}{3}+2k\pi \end{aligned}\right\}\ \text{con}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

f) $2\,sen\,x\cos x\cos x=6\,sen^3 x \rightarrow 2\,sen\cos^2 x=6\,sen^3 x \rightarrow$

$\rightarrow 2\,sen\,x(1-sen^2 x)=6\,sen^3 x \rightarrow 2\,sen\,x-2\,sen^3 x=6\,sen^3 x \rightarrow$

$\rightarrow sen\,x=0 \rightarrow x_1=0°,\ x_2=180°$

$sen^2 x=\dfrac{1}{4} \rightarrow sen\,x=\pm\dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3=30°,\ x_4=150° \\ x_5=210°,\ x_6=330° \end{cases}$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k\cdot 180° = k\pi \\ x_2 &= 30°+k\cdot 90° = \frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}\ \text{con}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

g) $\dfrac{tg(\pi/4)+tg\,x}{1-tg(\pi/4)\,tg\,x}+tg\,x=1 \rightarrow \dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}+tg\,x=1 \rightarrow$

$\rightarrow 1+tg\,x+tg\,x-tg^2 x=1-tg\,x \rightarrow tg^2 x-3\,tg\,x=0 \rightarrow$

$\rightarrow tg\,x(tg\,x-3)=0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} tg\,x=0 \rightarrow x_1=0°,\ x_2=180° \\ tg\,x=3 \rightarrow x_3=71°\ 33'\ 54{,}2'',\ x_4=251°\ 33'\ 54{,}2'' \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k\cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 &= 180°+k\cdot 360° = \pi+2k\pi \\ x_3 &= 71°\ 33'\ 54{,}2''+k\cdot 360° \approx \frac{2\pi}{5}+2k\pi \\ x_4 &= 251°\ 33'\ 54{,}2''+k\cdot 360° \approx \frac{7\pi}{5}+2k\pi \end{aligned}\right\}\ \text{con}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 71°\ 33'\ 54{,}2'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{2\pi}{5} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

34 **Resol les equacions següents:**

a) $\boldsymbol{\sin 3x - \sin x = \cos 2x}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1}$

c) $\boldsymbol{\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3}}$

d) $\boldsymbol{\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x}$

☛ ***Transforma les sumes o diferències de sinus i cosinus en productes.***

a) $2 \cos \dfrac{3x + x}{2} \operatorname{sen} \dfrac{3x - x}{2} = \cos 2x$

$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = \cos 2x \;\rightarrow\; 2 \operatorname{sen} x = 1 \;\rightarrow\; \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 30°,\;\; x_2 = 150°$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2 \operatorname{sen} 4x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 2x} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{\operatorname{sen} (2 \cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \dfrac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\cos 2x} = 1 \;\rightarrow\; 2 \operatorname{sen} 2x = 1 \;\rightarrow\; \operatorname{sen} 2x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 30° \;\rightarrow\; x_1 = 15° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 150° \;\rightarrow\; x_2 = 75° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 390° \;\rightarrow\; x_3 = 195° + k \cdot 360° = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 510° \;\rightarrow\; x_4 = 255° + k \cdot 360° = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

c) $\frac{2\ sen\ 2x\ cos\ x}{-2\ sen\ 2x\ sen\ x} = \frac{cos\ x}{-sen\ x} = -\frac{1}{tg\ x} = \sqrt{3} \rightarrow tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{cases}$

Ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\ 3x - sen\ x = cos\ 3x - cos\ x \rightarrow$

$\rightarrow 2\ cos\ 2x\ sen\ x = -2\ sen\ 2x\ sen\ x \rightarrow$ (dividimos entre $2\ sen\ x$)

$\rightarrow cos\ 2x = -sen\ 2x \rightarrow \frac{sen\ 2x}{cos\ 2x} = -1 \rightarrow tg\ 2x = -1 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 315° \rightarrow x_1 = 157{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 135° \rightarrow x_2 = 67{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 675° \rightarrow x_3 = 337{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 495° \rightarrow x_4 = 247{,}5° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$$x = 67{,}5° + k \cdot 90° \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

35 **a) Demostra que: $sin\ 3x = 3\ sin\ x\ cos^2\ x - sin^3\ x$**

b) Resol l'equació $sin\ 3x - 2\ sin\ x = 0$.

☛ ***a) Fes $sin\ 3x = sin\ (2x + x)$ i desenvolupa.***

b) Substituïx $sin\ 3x$ pel resultat anterior.

a) $sen\ 3x = sen\ (2x + x) = sen\ 2x\ cos\ x + cos\ 2x\ sen\ x =$

$= 2\ sen\ x\ cos\ x\ cos\ x + (cos^2\ x - sen^2\ x)\ sen\ x =$

$= 2\ sen\ x\ cos^2\ x + sen\ x\ cos^2\ x - sen^3\ x = 3\ sen\ x\ cos^2\ x - sen^3\ x$

b) $sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow$ por el resultado del apartado anterior:

$3\ sen\ x\ cos^2\ x - sen^3\ x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow 3\ sen\ x\ (1 - sen^2\ x) - sen^3\ x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3\ sen\ x - 3\ sen^3\ x - sen^3\ x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4\ sen^3\ x - sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x\ (4\ sen^2\ x - 1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 150° \\ sen\ x = \pm 1/2 \rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 150°,\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas y se pueden expresar como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 180° = (\pi/6) + k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 180° = (5\pi/6) + k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

36 **Demostra les igualtats següents:**

a) $\boldsymbol{cos\,(\alpha + \beta) \cdot cos\,(\alpha - \beta) = cos^2\,\alpha - sin^2\,\beta}$

b) $\boldsymbol{sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = sin\,\alpha \cdot sin\,\beta}$

c) $\boldsymbol{cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = sin\,\alpha \cdot sin\,\beta}$

a) $cos\,(\alpha + \beta)\,cos\,(\alpha - \beta) = (cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta)\,(cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta) =$

$= cos^2\,\alpha\,cos^2\,\beta - sen^2\,\alpha\,sen^2\,\beta =$

$= cos^2\,\alpha\,(1 - sen^2\,\beta) - (1 - cos^2\,\alpha) \cdot sen^2\,\beta =$

$= cos^2\,\alpha - cos^2\,\alpha\,sen^2\,\beta - sen^2\,\beta + cos^2\,\alpha\,sen^2\,\beta =$

$= cos^2\,\alpha - sen^2\,\beta$

b) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right] \cdot \left[sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=}$$

$$= \left[2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\,\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos\,\beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - cos\,\alpha)\,(1 + cos\,\beta)\,(1 + cos\,\alpha)\,(1 - cos\,\beta)} =$$

$$= \sqrt{(1 - cos^2\,\alpha)\,(1 - cos^2\,\beta)} = \sqrt{sen^2\,\alpha \cdot sen^2\,\beta} = sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta$$

c) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = -\beta$$

$$cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$

$$= \left[cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right] \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{-\beta}{2}\right] \cdot \left[-2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{-\beta}{2}\right] = \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\beta} = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - 1 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

(*) Por el apartado b).

37 **Simplifica:** $\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha$

$\operatorname{sen}\alpha(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) - \cos\alpha \cdot 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$

$= \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha =$

$= -\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha = -\operatorname{sen}\alpha(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

38 **Resol els sistemes següents donant les solucions corresponents al primer quadrant:**

a) $\begin{cases} x + y = 120° \\ \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 y = 1 \end{cases}$

☛ ***Fes*** $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ ***i*** $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

c) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$

a) De la segunda ecuación:

$$2\cos\frac{x + y}{2}\operatorname{sen}\frac{x - y}{2} = \frac{1}{2}$$

Como:

$$x + y = 120° \rightarrow 2\cos 60°\operatorname{sen}\frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}\frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x - y}{2} = 30° \rightarrow x - y = 60°$$

Así: $x + y = 120°$

$x - y = 60°$

$2x = 180° \rightarrow x = 90° \rightarrow y = 30°$

Luego la solución es: (90°, 30°)

b) Como $\left.\begin{array}{l} cos^2\, y = 1 - sen^2\, y \\ cos^2\, x = 1 - sen^2\, x \end{array}\right\}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} sen^2\, x + 1 - sen^2\, y = 1 \\ 1 - sen^2\, x - sen^2\, y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} sen^2\, x - sen^2\, y = 0 \\ -sen^2\, x - sen^2\, y = 0 \end{array}\right\}$$

(Sumando ambas igualdades) $\rightarrow\ -2\, sen^2\, y = 0 \ \rightarrow\ sen\, y = 0 \ \rightarrow\ y = 0°$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$cos^2\, x - 0 = 1 \ \rightarrow\ cos^2\, x = 1 \ = \begin{cases} cos\, x = 1 \ \rightarrow\ x = 0° \\ cos\, x = -1 \ \rightarrow\ x = 180° \in 2.° \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: (0°, 0°)

c) $x + y = 90° \ \rightarrow$ complementarios $\rightarrow\ sen\, x = cos\, y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$cos\, y + cos\, y = 1 \ \rightarrow\ 2\, cos\, y = 1 \ \rightarrow\ cos\, y = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ y = 60° \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x = 90° - y = 90° - 60° = 30°$$

Luego la solución es: (30°, 60°)

39 Justifica que per a qualsevol angle α es verifica:

$$\sqrt{2}\, \boldsymbol{cos} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \boldsymbol{sin}\, \alpha + \boldsymbol{cos}\, \alpha$$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad:

$$\sqrt{2} \cdot cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2} \left(cos\, \frac{\pi}{4}\, cos\, \alpha + sen\, \frac{\pi}{4}\, sen\, \alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, cos\, \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\, sen\, \alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\, (cos\, \alpha + sen\, \alpha) = \frac{2}{2}\, (cos\, \alpha + sen\, \alpha) =$$

$$= cos\, \alpha + sen\, \alpha$$

40 Expressa *sin* 4α i *cos* 4α en funció de *sin* α i *cos* α.

- $sen\, 4\alpha = sen\, (2 \cdot 2\alpha) = 2\, sen\, \alpha\, cos\, 2\alpha = 2 \cdot 2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha \cdot (cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha) =$

  $= 4\, (sen\, \alpha\, cos^3\, \alpha - sen^3\, \alpha\, cos\, \alpha)$

- $cos\, 4\alpha = cos\, (2 \cdot 2\alpha) = cos^2\, 2\alpha - sen^2\, 2\alpha =$

  $= (cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha)^2 - (2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha)^2 =$

  $= cos^4\, \alpha + sen^4\, \alpha - 2\, cos^2\, \alpha\, sen^2\, \alpha - 4\, sen^2\, \alpha\, cos^2\, \alpha =$

  $= cos^4\, \alpha + sen^4\, \alpha - 6\, sen^2\, \alpha\, cos^2\, \alpha$

Pàgina 145

QÜESTIONS TEÒRIQUES

41 **Quina relació hi ha entre les raons trigonomètriques dels angles que fan $\pi/5$ i $4\pi/5$ radiants?**

$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi \rightarrow$ son suplementarios, luego:

$sen\ \frac{\pi}{5} = sen \left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = sen\ \frac{4\pi}{5}$

$cos\ \frac{\pi}{5} = -cos\ \frac{4\pi}{5}; \quad tg\ \frac{\pi}{5} = -tg\ \frac{4\pi}{5}$

42 **Relaciona aquestes expressions amb les raons trigonomètriques de l'angle α:**

a) $\boldsymbol{sin\ (\pi - \alpha); \quad cos\ (\pi - \alpha); \quad tg\ (\pi - \alpha)}$

b) $\boldsymbol{sin\ (\pi + \alpha); \quad cos\ (\pi + \alpha); \quad tg\ (\pi + \alpha)}$

c) $\boldsymbol{sin\ (2\pi - \alpha); \quad cos\ (2\pi - \alpha); \quad tg\ (2\pi - \alpha)}$

a) $\begin{cases} sen\ (\pi - \alpha) = sen\ \alpha \\ cos\ (\pi - \alpha) = -cos\ \alpha \end{cases} \rightarrow \ tg\ (\pi - \alpha) = -tg\ \alpha$

b) $\begin{cases} sen\ (\pi + \alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (\pi + \alpha) = -cos\ \alpha \end{cases} \rightarrow \ tg\ (\pi + \alpha) = tg\ \alpha$

c) $\begin{cases} sen\ (2\pi - \alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (2\pi - \alpha) = cos\ \alpha \end{cases} \rightarrow \ tg\ (2\pi - \alpha) = -tg\ \alpha$

43 **Expressa $A(x)$ en funció de $sin\ x$ i $cos\ x$:**

a) $\boldsymbol{A(x) = sin\ (-x) - sin\ (\pi - x)}$

b) $\boldsymbol{A(x) = cos\ (-x) + cos\ (\pi + x)}$

c) $\boldsymbol{A(x) = sin\ (\pi + x) + cos\ (2\pi - x)}$

a) $A(x) = sen\ (-x) - sen\ (\pi - x) = -sen\ x - sen\ x = -2\ sen\ x$

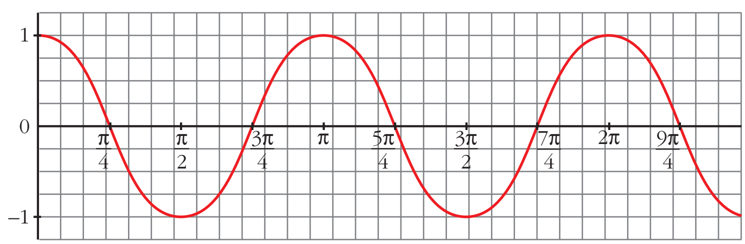
b) $A(x) = cos\ (-x) + cos\ (\pi + x) = cos\ x + (-cos\ x) = 0$

c) $A(x) = sen\ (\pi + x) + cos\ (2\ \pi - x) = -sen\ x + cos\ x$

44 **Fes, amb la calculadora, una taula de valors de la funció $y = \cos 2x$, donant a x valors compresos entre 0 i 2π radiants i representa-la gràficament.**

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \cos 2x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	2π
0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	–1	0	0



PER A APROFUNDIR-HI

45 **Representa les funcions:**

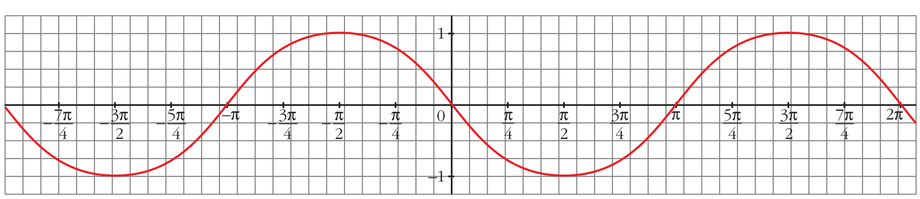
a) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

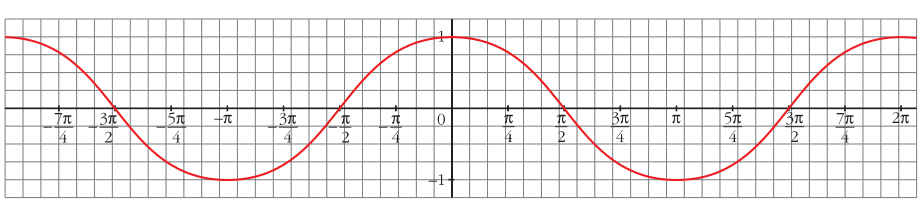
c) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

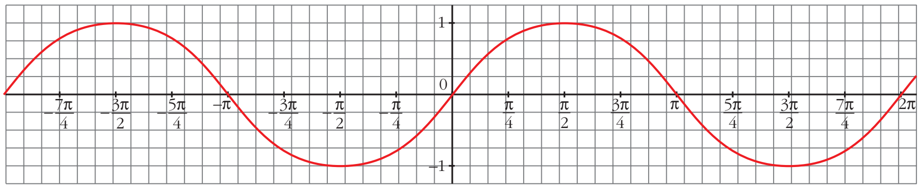
a)



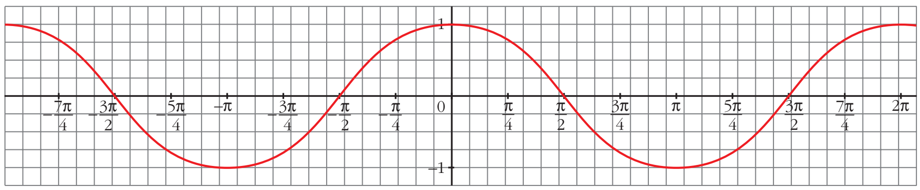
b)



c)



d)



46 **Resol els sistemes següents donant les solucions corresponents al primer quadrant:**

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 3/4 \\ \cos^2 x - \sin^2 y = 1/4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \cos (x + y) = 1/2 \\ \sin (x - y) = 1/2 \end{cases}$

a) Despejando en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = 1 - \cos y^{\,(*)} \\ \text{Como } \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \end{array}\right\} \text{ entonces:}$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - (1 - \cos y)^2} = \sqrt{1 - 1 - \cos^2 y + 2 \cos y} = \sqrt{2 \cos y - \cos^2 y}$$

Y, sustituyendo en la primera ecuación, se tiene:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{3} \;\rightarrow\; \sqrt{2 \cos y - \cos^2 y} + \operatorname{sen} y = \sqrt{3} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \operatorname{sen} y = \sqrt{3} - \sqrt{2 \cos y - \cos^2 y}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\operatorname{sen}^2 y = 3 + (2 \cos y - \cos^2 y) - 2\sqrt{3\,(2 \cos y - \cos^2 y)}$$

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y - 2 \cos y - 3 = -2\sqrt{3\,(2 \cos y - \cos^2 y)}$$

$$1 - 2 \cos y - 3 = -2\sqrt{3\,(2 \cos y - \cos^2 y)}$$

$$-2\,(1 + \cos y) = -2\sqrt{3\,(2 \cos y - \cos^2 y)}$$

Simplificamos y volvemos a elevar al cuadrado:

$$(1 + \cos y)^2 = 3\,(2 \cos y - \cos^2 y) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 1 + \cos^2 y + 2 \cos y = 6 \cos y - 3 \cos^2 y \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 4 \cos^2 y - 4 \cos y + 1 = 0 \;\rightarrow\; \cos y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; y = 60°$$

Sustituyendo en (*), se tiene:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60°$$

b) $\left.\begin{array}{l} sen^2\, x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ \cos^2 x - sen^2\, y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$ Sumando:

$sen^2\, x + \cos^2 x + \cos^2 y - sen^2\, y = 1 \rightarrow 1 + \cos^2 y - sen^2\, y = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos^2 y = 1 \rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = 45°$

(Solo consideramos las soluciones del primer cuadrante).

Sustituyendo en la primera ecuación:

$sen^2\, x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \rightarrow sen^2\, x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow$

$\rightarrow sen^2\, x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \rightarrow sen^2\, x = \frac{1}{4} \rightarrow sen\, x = \pm\frac{1}{2}$

Nos quedamos con la solución positiva, por tratarse del primer cuadrante. Así:

$$sen\, x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30°$$

Luego la solución es: (30°, 45°)

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Como } x, y \in 1.^{er} \text{ cuadrante} \\ \text{y además } \cos(x + y) > 0 \\ \qquad\qquad sen\,(x - y) > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y \in 1.^{er} \text{ cuadrante} \\ x - y \in 1.^{er} \text{ cuadrante} \end{array}\right.$

Teniendo esto en cuenta:

$\cos(x + y) = \frac{1}{2} \rightarrow x + y = 60°$

$sen\,(x - y) = \frac{1}{2} \rightarrow x - y = 30°$ (Sumamos ambas ecuaciones)

$$2x = 90° \rightarrow x = 45°$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando:

$$y = 60° - x = 60° - 45° = 15°$$

La solución es, por tanto: (45°, 15°)

47 **Demostra que:**

a) $\sin x = \dfrac{2\,tg\,x/2}{1 + tg^2\,x/2}$ **b)** $\cos x = \dfrac{1 - tg^2\,x/2}{1 + tg^2\,x/2}$ **c)** $tg\,x = \dfrac{2\,tg\,x/2}{1 - tg^2\,x/2}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{2\,tg\,(x/2)}{1 + tg^2\,(x/2)} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{2}{1 + \cos x}} = (1 + \cos x)\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \sqrt{(1 + \cos x)^2\,\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{(1 + \cos x)\,(1 - \cos x)} =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{sen^2\,x} = sen\,x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\,(x/2)}{1 + tg^2\,(x/2)} = \frac{1 - \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\dfrac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}}{\dfrac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2\cos x}{2} = \cos x$$

c) $$\frac{2\,tg\,(x/2)}{1 - tg^2\,(x/2)} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 - \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{2\cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{(1 + \cos x)^2\,\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\sqrt{(1 + \cos x)\,(1 - \cos x)} = \frac{1}{\cos x}\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{sen^2\,x} = \frac{1}{\cos x} \cdot sen\,x = tg\,x$$

AUTOAVALUACIÓ

1. **Expressa en graus: $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{2}$ rad, 2 rad.**

$\frac{3\pi}{4}$ rad = 135° $\frac{5\pi}{2}$ rad = 450° 2 rad = 114° 35' 30''

2. **Expressa en radiants donant-ne el resultat en funció de π i com a nombre decimal:**

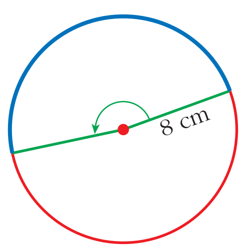
a) 60° b) 225° c) 330°

a) $60° = \frac{\pi}{3}$ rad = 1,05 rad

b) $225° = \frac{5\pi}{4}$ rad = 3,93 rad

c) $330° = \frac{11\pi}{6}$ rad = 5,76 rad

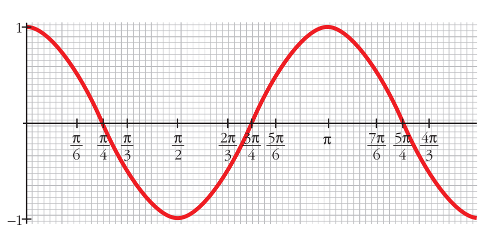
3. **En una circumferència de 16 cm de diàmetre dibuixem un angle de 3 rad. Quina longitud tindrà l'arc corresponent?**



$l = 8 \cdot 3 = 24$ cm

4. **Associa a aquest gràfic una de les expressions següents i digues quin n'és el període:**

a) $y = cos\ x$ b) $y = cos\ 2x$ c) $y = 2cos\ x$



Completa aquests punts perquè pertanyen al gràfic: (5π/6, ...), (4π/3, ...), (–π/4, ...).

La gráfica corresponde a la b) $y = cos\ 2x$. Su periodo es π.

$$\left(\frac{5\pi}{6}, \ldots\right) \rightarrow y = \cos 2 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{4\pi}{3}, \ldots\right) \rightarrow y = \cos 2 \cdot \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \ldots\right) \rightarrow y = \cos 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

5. Si $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ i $\alpha < \pi$, troba:

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos (\pi + \alpha)$ c) $tg \frac{\alpha}{2}$ d) $\sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{4} \quad \alpha < \pi \rightarrow sen^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

a) $sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha \cos \alpha = 2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$

b) $\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{4}$

c) $tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - (-1/4)}{1 + (-1/4)}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

d) $sen \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = sen \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6}\ sen\ \alpha = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} =$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{45}}{8} = \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{8}$$

6. Demostra cadascuna d'aquestes igualtats:

a) $tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$

b) $\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

a) $tg\ 2\alpha = \frac{sen\ 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 sen\ \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} = \frac{\frac{2 sen\ \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{sen^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 tg\ \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$

b) $sen (\alpha + \beta) \cdot sen (\alpha - \beta) =$

$= (sen\ \alpha \cos \beta + \cos \alpha\ sen\ \beta)(sen\ \alpha \cos \beta - \cos \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha\ sen^2 \beta = sen^2 \alpha (1 - sen^2 \beta) - (1 - sen^2 \alpha)\ sen^2 \beta =$

$= sen^2 \alpha - sen^2 \alpha\ sen^2 \beta - sen^2 \beta + sen^2 \alpha\ sen^2 \beta = sen^2 \alpha - sen^2 \beta$

7. **Resol:**

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ **b)** $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x = 1$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$\cos^2 x - sen^2 x - (-sen\, x) = 1 \rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x + sen\, x - 1 = 0$

$-2sen^2 x + sen\, x = 0 \rightarrow sen\, x(-2sen\, x + 1) = 0$:

- $sen\, x = 0$: $x = 0°$, $x = 180°$
- $sen\, x = \frac{1}{2}$: $x = 30°$, $x = 150°$

Soluciones:

$x_1 = 360°k;\ x_2 = 180° + 360°k;\ x_3 = 30° + 360°k;\ x_4 = 150° + 360°k$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1 \rightarrow 2tg\, x \frac{1 + \cos x}{2} - sen\, x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow tg\, x + tg\, x \cos x - sen\, x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow tg\, x + \frac{sen\, x}{\cos x} \cos x - sen\, x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow tg\, x = 1$: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 45° + 360°k \\ x_2 = 225° + 360°k \end{array}\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$

8. **Simplifica:**

a) $\dfrac{\sin 60° + \sin 30°}{\cos 60° + \cos 30°}$ **b)** $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}\right)$

a) $$\frac{sen\, 60° + sen\, 30°}{\cos 60° + \cos 30°} = \frac{2sen \frac{60° + 30°}{2} \cos \frac{60° - 30°}{2}}{2\cos \frac{60° + 30°}{2} \cos \frac{60° - 30°}{2}} = \frac{sen\, 45°}{\cos 45°} = tg\, 45° = 1$$

b) $$\frac{sen^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) = \frac{sen^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(\frac{2}{1 + \cos \alpha}\right) =$$

$$= \frac{2sen^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2sen^2 \alpha}{sen^2 \alpha} = 2$$